東北大学数学ⅠAⅡBを受講する皆さんへ

このテキストを手にしている皆さんは，志高くここまで勉強を進めてきたと思います。その努力を，**東北大学に通用する力に仕上げるために必要なこと**とは？　…それをお話しする前に，まずは皆さんは**「細やかな技術」**がきちんと身についていますか？　特に高２までに数学の各分野のさまざまな問題を通じ，皆さんはさまざまな技術を磨いてきたはずです。もし不足している部分・分野が自覚された時には，速やかに技術を再び磨いておいてください。

さて，数学においてはよく「応用力がない」という声を耳にします。それはいわゆる「公式暗記型」でしか数学を勉強していない人によく見られる気がします。「２次方程式が異なる２つの実数解をもつ」⇒「判別式 $D>0$」といったように。数学で大切なのは「⇒」，いわゆる「プロセス」の部分です。そこに至る「背景」「理由」ですね。それを理解した上で「⇒」をショートカットする分にはまったくかまいませんが。皆さんはちゃんとそれを自覚してきましたか？

そして，「応用力」とはまさに**「プロセス力」**と言えましょう。問題を見たとき，その問題が語っていることをその字面の奥に潜む部分まで読み込み，どこに自分の手で解決しなければならない「壁」があるのかを考えるわけです。さらに壁を越えるために何が必要か。その「鍵」がこの「⇒」に隠されています。そうです，それを選択すべき「理由」があるのです。はたまた，時には形の美しさといった，数学の枠を越えた部分にヒントが隠されていることもあるでしょう。それを見抜き，立式し，磨いた技術をもって計算し答案として仕上げていくのです。

このテキストは，この**「プロセス力」を養うために必要な問題が厳選**されています。後述しますが，このテキストの使い方に従い，画面を通じて伝わってくるものを目で，耳で，肌で吸収し，自分のものとするための**復習を実践**すれば（ここ大事！），無限に広がる数学の世界の扉は確実に開かれます。今日の授業から何が皆さんに伝わってきたのか。それを反芻し，ほかの異なる場面においても**「考える」癖をつける**。それこそが，東北大学に通用する力となりましょう。

そうです。**「この講座だけをやればいい」のではありません**。「傾向と対策」というものは，大学入試には存在しません。「たまたま」出ることが多かった分野に絞って勉強することのリスクが高すぎるからです。扉を開いた後は，自ら歩んでいくことです。そのために必要な問題集もご紹介いたします。扉が開かれているのにその先に進まない人はいないでしょう。なぜならば，その先にあなた方が目指す「東北大学」があるのですから。

この講座を見るたびに，さまざまな「開かずの扉」が音を立てて開くでしょう。決してテクニカルなことは要求しません。必要なのは，磨いてきたはずの**技術**，そしてその技術を活かすべくこの講座をとらえる**謙虚な姿勢**，そして受かりたいという**気持ち**です。その気持ちで授業を聞き，もし感動することがあっても，感動したという事実だけでその日を終わらないでください。せっかく開きかけた扉も，時間がたてば自動的に閉まりますよ。**真に感動すべきは，自分で「未知なる道」を切り開いた時**です。その感動をかみしめながら，一歩，また一歩，東北大学を目指して前進しましょう。何かを見失ったとき，忘れた時、私は，指南役としていつもあなたのそばに現れます。

山内　恵介

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜東北大学数学ⅠAⅡB　目次＞

第１講　２次関数・方程式・不等式
第２講　高次方程式，証明
第３講　場合の数・確率
第４講　図形と方程式
第５講　微分法・積分法
第６講　指数・対数・三角関数
第７講　ベクトル
第８講　数列
第９講　総合問題⑴
第 10 講　総合問題⑵

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」３問で形成されています。まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう。自分が問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります。

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません。掲載されている問題はすべて実際に東北大学の入試に出題されたものですから，最後まで解けないことも多いかもしれません。それでも，いろいろな可能性を追ってみましょう。

ちなみに１問にかけてよい時間はおよそ 20 分です。もちろん，このまま続ければ（おそらく）最後の答えに行き着く！　というところまで行っている場合は，30 分まではかけて結構です。３問でおよそ１時間から１時間半。数学に本気で向き合う時間です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じとってください。問題が掲載されているページはすべて見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。 それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られています

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

から，先生はすべてを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれませんよ。あくまで「Note」=「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でいいのです。

ちなみにここまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありません。ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？　大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事です。もちろんそれでも「今日はこれを解決しないと眠れない！」という人…。明日は寝不足で学校に行くことになるかもしれませんが，先生がとことんお付き合いしますよ。そんな日も時にはあっていいのかもしれませんね。

ちなみに各講義を通じ，この問題から得られることを「Point Pickup」と題して簡潔にお伝えいたします。自分で感じたことも含めテキストに残しておきましょう。

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題やPoint Pickupを見ながらもう一度頭に描いてみましょう。もし思い出せない場面があったらノートを見てみましょう。そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を解いてみましょう。予習と異なり，ここでは計算も含め実際にていねいに記述していきましょう。もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などで途中で止まってしまうかもしれません。また，あなたの想いをどう記述で表現していいかわからない場合もあるかもしれません。安心してください。すべての問題に「模範解答」がついています。必要に応じ，画面を見る，またはプリントアウトして参考にしてください。

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です。こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう。

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います。そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となりましょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講２題ずつ用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度もさまざまです。

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。解答にはワンポイントのコメントもついています。この「練習問題」もまた，皆さんの成長のために厳選した

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

問題です。より理解を深めていただきたく思います。

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に至ることができます。それはもしかしたら自分の力だけで到達したかもしれない領域です。しかし，もしそうであったとしても，そこに至る確実性の高いものがあるとしたら，それを選択することによって浮いた時間や労力をほかの学習に回すことができるでしょう。この講義がそういう目的をかなえるための存在であること，それは繰り返しますがサイクルを確実に構築した人だけがわかることです。皆さんの日々の努力，期待しています。

☆数学ⅠAⅡB 「おすすめの参考書」☆

この講義と同時並行で進めると効果的な書籍を以下に挙げておきます。学校の授業で課せられた課題等とのバランスを見ながら，着々と進めて行きましょう。

ちなみに数学の日々の自主学習において，詳細な解答がないものはまったくお勧めできません。答えに行き着く「プロセス」が数学であることは前述した通りです。最後の「答」しかない問題集やプリントではお話になりません。自分で考えれば必ず答にたどり着く！とおっしゃられる方もおりますが，「各知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」がまったく考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう。受験勉強，特に受験が近づいてきている時期に求められるのは，「時間対効果」です。

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」とする。以下に挙げるのはそんな本です。また，センター試験の勉強に本格的に入ると，数学の記述力が確実に落ちます。良問を通じた日々のたゆまぬ記述訓練がそれを防ぐことになるでしょう。

【入試突破のための基礎固め】

・「1 対 1 対応の演習」（東京出版）

例題を元に，入試の典型的解法を身につけることができます。Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・Cの全6冊です。教科書およびチャート式などの参考書で積み上げてきた知識をもう一歩上の実力に代えるための本です。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【入試問題集】

・新数学スタンダード演習ⅠAⅡB　（東京出版）

入試の典型問題を網羅したものです。分野別となっていて，日々のペースメーカーに最適です。「大学への数学」という月刊誌の４月増刊号です。

増刊号ですから，入試が近づくにつれて各書店の在庫がなくなりますので注意してください。

・理系数学の良問プラチカ　数学ⅠAⅡB　（河合塾 SERIES）

良問と詳細な解説が掲載されており，自主学習に適しています。ちなみに「文系数学の良問プラチカ」は，この「理系数学」よりレベルが高いため最初に手をつけないように！

・東北大学　赤本　（教学社）

有名な過去問題集です。第一志望が決定したら購入しておきましょう。傾向を知る，というより近年こういうレベルの問題が出ている，ということを肌で感じることができます。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　２次関数・方程式・不等式

1　２次方程式 $x^2+bx+c=0$ が実数解をもち，２次方程式 $x^2-|b|x-|c|=0$ が正の解をもつとする．はじめの方程式の解の絶対値の小さくない方を α，あとの方程式の正の解を β とするとき，$|\alpha|$ と β の大小を比較せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 a，b を実数とし，

$$f(x)=x^2-2a|x|+b$$

とする．$|f(x)|=1$ を満たす実数 x の個数を N とする．

(1) $a\leqq 0$ のとき，N の最大値を求めよ．

(2) $N=6$ となるような点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2 定点 B，C をそれぞれ，(−1，0) と (1，0) する．点 A が直線 $y=a$ ($a>0$) 上を動くとき，次の各問いに答えよ．

(1)　△ABC の垂心（三角形の 3 頂点から対辺に下ろした垂線の交点）H のえがく図形の方程式を求めよ．

(2)　原点 O と H の距離の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　高次方程式，証明

1 ［1］ a，b，c，d は正の実数で $a \geqq b \geqq c+d$ とするとき，$ad+bc$ と ab との大小を調べよ．

［2］ $f(x)=x^3-3x+1$ とおき，3 次方程式 $f(x)=0$ の 1 つの解を α とする．

(1) $f(\alpha^2-2)$ の値を求めよ．

(2) 2 次方程式 $x^2-\alpha x+1=0$ の 1 つの解を β とするとき，$\beta^3+\dfrac{1}{\beta^3}$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の 1 つの解が他の解の 3 乗になるためには

$$p^2(p^2-4q)=q(q-1)^2$$

が必要十分条件であることを証明せよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　a，b，c は $a^2-3b^2=c^2$ を満たす整数とするとき，次のことを証明せよ．

(1)　a，b の少なくとも一方は偶数である．

(2)　a，b が共に偶数なら，少なくとも一方は 4 の倍数である．

(3)　a が奇数なら b は 4 の倍数である．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

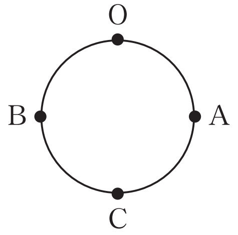
< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　場合の数・確率

1　図のように円周上に4点O，A，B，Cがある．ある粒子はこの円周上を点Oを出発して，時計回りに確率 $\frac{2}{3}$ でとなりの点に，反時計回りに確率 $\frac{1}{3}$ でとなりの点に移動する．



(1)　この粒子が4回の移動までにA，B，Cすべての点を訪問する確率を求めよ．

(2)　この粒子が n 回の移動までにCを訪問しない確率を求めよ．

【Point Pickup】

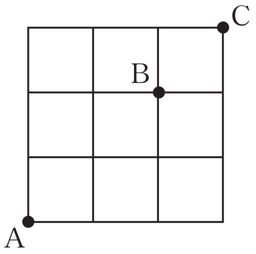
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　右の図のような格子状の道路がある．左下の A 地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むとする．1 の目が出たら右に 2 区画，2 の目が出たら右に 1 区画，3 の目が出たら上に 1 区画進み，その他の場合はそのまま動かない．ただし，右端で 1 または 2 の目が出たとき，あるいは上端で 3 の目が出たときは，動かない．また，右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは，右端まで進んで止まる．



n を 8 以上の自然数とする．A 地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど 6 回目に，B 地点以外の地点から進んで B 地点に止まり，n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ．ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 「上の欄の項目に関係ある項目を下の欄から選び，これを線で結べ」という問題において，上欄には 3 個の項目 A，B，C があり，下欄には $n+3$ 個の項目がある．下欄の項目のうちには A，B，C に関係あるものがそれぞれ 1 つずつあり，他の n 個は A，B, C のどれにも関係のない項目である．いま，でたらめに下欄の項目から 3 個を選び，項目 A，B，C と結んだとき，次の問いに答えよ．ただし n は 0 以上の整数とする．

(1) 2 本の線のみが正しい解答になっている確率を求めよ．

(2) 1 本の線のみが正しい解答になっている確率を求めよ．

(3) 正しい解答の線にそれぞれ 2 点を与え，6 点満点とするとき，でたらめな解答者の得点の期待値を 1 点以下にしたい．n をいくら以上にすればよいか．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　図形と方程式

1　［1］　2 点 A(4, 0), B(0, 2) を考える．線分 AB 上の点 P と x 軸上の点 Q が ∠OPB＝∠QPA (O：原点) を満たしている．直線 OP の傾きを m として，Q の x 座標を m を用いて表せ．

［2］　a を正の定数とする．y 軸上に定点 A(0, a), および x 軸上に動点 P(p, 0) をとる．P を通る AP の垂線が y 軸と交わる点を Q とし，P に関する Q の対称点を R とする．点 P が x 軸上を動くとき，R はどんな曲線をえがくか．その方程式を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　次の問いに答えよ．

(1)　中心の座標が $(a,\ b)$ で半径が r である円周上の点 $(x_1,\ y_1)$ において，この円に引いた接線の方程式は

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

として表されることを証明せよ．

(2)　円 $x^2+y^2=4$ 上の同一直径上にない異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ において，この円に引いた 2 接線の交点を R とする．点 P，Q を結ぶ直線の方程式を $Ax+By=1$ と表したとき点 R の座標を A，B を用いて表せ．

(3)　直線 $Ax+By=1$ が円 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ に接しながら動くとき，点 R はどんな曲線上にあるか．その方程式を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$1<p \leqq 3$ のとき，すべての実数 x に対して $\sin^2 x+p\sin x+q \geqq 0$ が成り立つとする．このとき，点 $(p,\ q)$ のえがく範囲を図示せよ．さらに $p,\ q$ がこの条件を満たすとき，$\dfrac{q+2}{p-1}$ の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法・積分法

1　a を整数とする．直線 $y=2(x-1)$ が曲線 $y=ax^3+(1-2a)x$ $(a\neq 0)$ に接するように a の値を定めよ．また，この２つのグラフによって囲まれる部分の面積を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面において，不等式 $y \leqq x^3-3p^2(x-2)-q$ で定まる領域を D，不等式 $1 \leqq x \leqq 2$，$y \leqq 0$ で定まる領域を E とする．E が D に含まれるための p，q についての条件を求めよ．また，この条件をみたす $(p,\ q)$ の領域を pq 平面に図示せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　平面上で不等式

$0 \leqq y \leqq 2x \leqq 6$ および $-x^2+4x-3 \leqq y \leqq 2$

を同時に満たす領域を D とする．

(1)　a は $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲の定数とする．このとき，不等式 $a \leqq x \leqq a+1$ を満たす領域と D との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ．

(2)　a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値および最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　指数・対数・三角関数

1　[1]　a, b, c をそれぞれ１より大きい数とする．このとき，

$1<\log_{ab} a+\log_{bc} b+\log_{ca} c<2$ であることを示せ．

[2]　次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ \log_x y+\log_y x = \dfrac{13}{6} \end{cases}$$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) $x \leqq \log_2 \dfrac{x^3-1}{x^3} \leqq 1$ を満たす x の範囲を求めよ.

(2) xy 平面において，x 座標が(1)を満たす点の集合と $3x \leqq y \leqq x^3+2$ で表される図形との共通部分の面積を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　単位円上の点 $(a,\ b)$ $(a^2+b^2=1)$ から，放物線 $y=x^2$ へ異なる 2 本の接線が引けるとき，この 2 本の接線と $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を最大にしたい．このような点 $(a,\ b)$ を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　ベクトル

1 ［1］　短針の長さが 1，長針の長さが 2 の時計がある．短針を $\vec{a}$，長針を $\vec{b}$ とするとき，点 $(|\vec{a}+\vec{b}|,\ \vec{a}\cdot\vec{b})$ の動く範囲を求め，それを図示せよ．

［2］　平面上に点 O を中心とする半径 5 の円がある．その周上に 4 点 A，B，C，D がこの順序にあり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が成り立つ．線分 AC と BD の交点を P とし，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とする．線分 AB と DC の長さをそれぞれ 4，5 として，次の値を求めよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(2)　$\cos\theta$

(3)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　四角形OABCは辺OAを下底，辺CBを上底とし，$\angle$AOCと$\angle$OABが等しい等脚台形である．

$a=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$，$c=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$，$m=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおく．

(1)　$m<\dfrac{a^2}{2}$が成り立つことを示せ．

(2)　等脚台形OABCの面積Sをa，c，mを用いて表せ．

(3)　対角線OBとACの交点をDとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を用いて表せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　点 $(7,\ 6,\ 4)$ を中心とする半径 3 の球があり，その表面は鏡でできているものとする．いま，方向ベクトル $(3,\ 2,\ 1)$ をもつ光が原点から発射されたとする．この光は球に到達し，到達点で反射した後，xy 平面を貫通するとする．このとき，その反射点と xy 平面を貫通した点の座標をそれぞれ求めよ．ただし，球面での光の反射はその点での法線（球の中心とその点を通る直線）と入射光線を含む平面内で起こり，入射角と反射角は等しいとする．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　数列

1　数列 $\{a_n\}$ は任意の自然数 n に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} a_{n-k} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

を満たしているとする．このとき，$\sum_{n=1}^{m} na_n$ を求めよ．ただし，$m \geqq 3$ とする．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=2,\ a_2=0,\ a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2n-8\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義されているとする.

(1) 一般項 a_n を求めよ.

(2) a_n が最小となる n, およびその最小値 a_n を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　次の問いに答えよ．

(1)　任意の正の整数 n に対して，不等式 $(n+6)^2<2^{n+5}$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

(2)　$1+3+5+\cdots\cdots+(2k+1)=2^k+4$ を満たす正の整数 k を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　総合問題(1)

1　x の方程式 $x^2+a|x-1|+b=0$ が異なる実数解をちょうど２個もつとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面に図示せよ．

【Point Pickup】

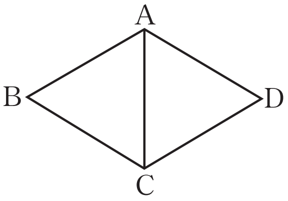
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　図のような4個の点 A，B，C，D を結んだ図形を考える．動点Pは点Aを出発点としてA，B，C，D上を移動する．PがAまたはCにいるときは，残りの3点にそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で移動し，PがBまたはDにいるときはA，Cにそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する．n 回の移動後にPがA，B，C，Dにいる確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とする．



(1)　a_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n，d_n を用いて表せ．

(2)　数列 $\{a_n+c_n\}$，$\{a_n-c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　a_n，c_n を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　xyz 空間において，xy 平面上に点 (0，1，0) を中心とする半径 1 の円 C_1 が，yz 平面上に点 (0，0，0) を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．C_1 上の点 P と C_2 上の点 Q が，それぞれ点 (0，2，0)，(0，0，1) を出発点として C_1，C_2 上を正の向きに動く．点 P が点 Q の 2 倍の速さで動くとき，点 P，Q 間の距離の最大値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　総合問題(2)

1　点 P$(s,\ t)$ は原点 O を中心とする半径 1 の円周上にあり，点 Q$(u,\ v)$ は点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円周上にある．P と Q が PQ$=1$ を保ちながら動くとき，次の問いに答えよ．

(1)　$s \neq 1$ のとき，u，v を s，t の式で表せ．

(2)　線分 PQ の中点の軌跡を図示せよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$t \geqq 1$ において，関数

$$f(t)=\int_{-1}^{1}|(x-t+2)(x+t)|dx$$

を最小にする t の値と，そのときの最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　記号 ＋ と － を重複を許し1列に並べてできる列のうち，同じ記号は3つ以上連続して並ばないものを考える．＋ と － という記号を全部で n 個 $(n \geqq 2)$ 使ってつくられるこのような列のうち，最後が ＋＋ または －－ で終わる列の個数を a_n とおき，最後が ＋－ または －＋ で終わる列の個数を b_n とおく．

(1)　a_{n+1} と b_{n+1} を a_n と b_n で表せ．

(2)　$\{a_n+rb_n\}$ が公比 r の等比数列となるような r の値をすべて求めよ．

(3)　長さが n のこのような列の個数 a_n+b_n を，(2)で求めた r の値を使って表せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a を実数とする．x についての方程式 $|x^2+ax+2a|=a+1$ が異なる実数解をちょうど2個もつような a の値の範囲を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面の 3 点 A$(0,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，C$(1,\ \sqrt{3})$ を頂点とする△ABC に対して以下の問いに答えよ．

(1)　$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ を満たす定数 a に対して，点 P$(x,\ a)$ が△ABC の周または内部に含まれるための x の範囲を求めよ．

(2)　(1)の定数 a に対して，(1)で求められた範囲を x が動くとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(3)　点 P$(x,\ y)$ が△ABC の周または内部に含まれるとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの点 P の座標 $(x,\ y)$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　$x \geqq 0$，$y>0$，$z \geqq 0$，$a>b>c$ で $(x+y+z)^2=ax+by+cz$ とする．$S=x+y+z$ とおくとき，S，a，c を大きい順に並べよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 t を0でない実数とし，2次方程式 $x^2-tx+5t=0$ を考える．

(1) $x^2-tx+5t=0$ の解 α，β が $\alpha^5+\beta^5=t^5$ を満たすとする．このときの t の値を求めよ．

(2) $x^2-tx+5t=0$ が虚数解をもち，その5乗が実数になるとする．このときの t の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 A, B の二人がそれぞれ 1 から 10 までの自然数の中から異なる 5 つの数を選ぶとき，2 人の選んだ数が 3 つ以上一致している確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　１から６の番号のつけられた６個の箱に，それぞれ３枚ずつの皿が重ねて置かれている．白いサイコロと黒いサイコロそれぞれ１個を同時に振って，出た目に応じて次の規則で皿を移動させるものとする．２つのサイコロに同じ目が出たときは皿は移動させない．２つのサイコロに異なる目が出たときは，黒いサイコロの目の数と同じ番号の箱から皿１枚を白いサイコロの目の数と同じ番号の箱に移す．

(1)　サイコロを３回振るとき，皿が４枚の箱と２枚の箱がそれぞれ３個ずつとなる確率を求めよ．

(2)　サイコロを３回振るとき，皿が３枚の箱が２個，５枚の箱，４枚の箱，２枚の箱，１枚の箱がそれぞれ１個ずつとなる確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\dfrac{1}{2}, t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる2本の接線を引き，2つの接点を通る直線を l とする．

(1) 直線 l の方程式を t を用いて表せ．

(2) t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず l が通る点がある．この点の座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　実数 a，b に対して，$f(x)=(a+8b)x^2-8bx+b$ とする．「$0 \leqq x \leqq 1$ ならば $f(x)>0$」が成り立つ点 $(a,\ b)$ の範囲を求め，ab 平面上に図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　2つの曲線 $y=x^2$ と $y=x^3-3x+3$ で囲まれる領域を D とする．次の問いに答えよ．

(1)　D を図示せよ．

(2)　点 (x, y) が D 上を動くとき，$3x+4y$ の最大値と，最大値を与える点 (x, y) を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[2] 放物線 $C : y=x^2-4x+3$ と直線 $l : y=mx-m$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 放物線 C と直線 l が接するときの m の値 m_0 を求めよ．

(2) $m>m_0$ とする．放物線 C と直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし，放物線 C と直線 l で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 をそれぞれ m を用いて表せ．

(3) $m>m_0$ における S_2-2S_1 の最小値，およびそのときの m の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　不等式 $\log_2 \dfrac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 1$ を満たす点 (x, y) が存在する範囲を図示せよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$ によって表される領域内を動くとき2次式 $7x^2+4xy+4y^2$ のとる値の最大値を求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

東北大数学ⅠAⅡB　第7講　ベクトル　練習問題

1　平面上の3点O，A，BがOA＝5，OB＝3，∠AOB＝θ ($0<\theta<\pi$) を満たしている．∠AOBの二等分線上の点Cを$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$となるようにとる．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおくとき，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$（$p$，$q$は実数）と表すことができる．$p$，$q$を$\theta$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{BC}}$のとき，$\cos\theta$を求めよ．

(3) (2)のとき，四角形OACBの面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 点 $(-1,\ -1,\ 2)$ を通り，方向ベクトルが $(2,\ 1,\ 2)$ である直線を g とする．また点 $\mathrm{A}(-3,\ 0,\ 2)$ と g を含む平面を α とする．次の各問いに答えよ．

(1) 点 A から g に下ろした垂線と g との交点を H とする．点 H の座標を求めよ．

(2) 点 A と g との距離を求めよ．

(3) 点 $(-2m-7,\ 2m+3,\ -3m+4)$ が α 上にあるとき，m の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 $a_1=-15$, $a_{n+1}=a_n+3n$ ($n=1$, 2, 3, ……) を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1) 一般項 a_n を求めよ.

(2) 初項 a_1 から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

(3) $n=1$, 2, 3, ……と変化したとき, S_n が最小となる n の値と, そのときの S_n の値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) $x \geqq 4$ を満たすすべての実数 x に対して，$x^3 > 3x^2 + x + 1$ が成り立つことを示せ.

(2) $m \geqq 10$ を満たすすべての自然数 m に対して，$2^m > m^3$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)=2|x(x^2-1)|$ のグラフの概形をかけ．

(2)　k を実数とするとき，方程式 $2|x(x^2-1)|=k-|x|$ の解の個数を k の値に応じて求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 原点をOとする xyz 空間内で，x 軸上の点A，xy 平面上の点B，z 軸上の点Cを，次を満たすように定める．$\angle \mathrm{OAC}=\angle \mathrm{OBC}=\theta$，$\angle \mathrm{AOB}=2\theta$，$\mathrm{OC}=3$

ただし，Aの x 座標，Bの y 座標，Cの z 座標はいずれも正であるとする．さらに，$\triangle \mathrm{ABC}$ 内の点のうち，Oからの距離が最小の点をHとする．また，$t=\tan\theta$ とおく．

(1) 線分OHの長さを t の式で表せ.

(2) Hの z 座標を t の式で表せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　$0 \leqq a \leqq 2$ を満たす実数 a に対して，x の関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2-(3a+1)x+2a^2+2a$ とし，区間 $0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ の定積分を $S(a)=\int_0^4 |f(x)|dx$ とする．

(1)　$0<a<1$ のとき $S(a)$ を求めよ．

(2)　a が $0 \leqq a \leqq 2$ の値をとって変化するとき，$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 次の条件によって定められる数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を考える．

$$x_1=1,\ y_1=5,\ x_{n+1}=x_n+y_n,\ y_{n+1}=5x_n+y_n$$

次の問いに答えよ．

(1) x_n および y_n をそれぞれ 5 で割ったときの余りを求めよ．

(2) $a_n=x_n+cy_n$ とおいたとき，数列 $\{a_n\}$ が等比数列となるように定数 c の値を定め，a_n を n の式で表せ．

(3) x_n および y_n を n の式で表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　２次関数・方程式・不等式

> **1**　２次方程式 $x^2+bx+c=0$ が実数解をもち，２次方程式 $x^2-|b|x-|c|=0$ が正の解をもつとする．はじめの方程式の解の絶対値の小さくない方を α，あとの方程式の正の解を β とするとき，$|\alpha|$ と β の大小を比較せよ．

$x^2+bx+c=0$ の２解は　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$

$f(x)=x^2+bx+c$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフの軸は　$x=-\dfrac{b}{2}$

$-\dfrac{b}{2}\leqq 0$　つまり　$b\geqq 0$ のとき　$\alpha=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\leqq 0$　　$|\alpha|=\dfrac{b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$

$b<0$ のとき　$\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}>0$　　$|\alpha|=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$

よって，b にかかわらず　$|\alpha|=\dfrac{|b|+\sqrt{b^2-4c}}{2}$

また　$x^2-|b|x-|c|=0$　の２解は　$x=\dfrac{|b|\pm\sqrt{b^2+4|c|}}{2}$

$g(x)=x^2-|b|x-|c|$ とおくと，$y=g(x)$ のグラフの軸は $x=\dfrac{|b|}{2}\geqq 0$　　$f(0)=-|c|\leqq 0$

よって　$\beta=\dfrac{|b|+\sqrt{b^2+4|c|}}{2}$

したがって　$\beta-|\alpha|=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{b^2+4|c|}-\sqrt{b^2-4c}\right)$

ここで $|c|-(-c)=\begin{cases} c+c=2c>0 & (c>0) \\ -c+c=0 & (c\leqq 0) \end{cases}$ より

$c>0$ のとき　$|c|\geqq -c$　つまり　**$\beta>|\alpha|$**　　**$c\leqq 0$ のとき**　$|c|=-c$　つまり　**$\beta=|\alpha|$**

> **2**　a，b を実数とし，
>
> $f(x)=x^2-2a|x|+b$
>
> とする．$|f(x)|=1$ を満たす実数 x の個数を N とする．
>
> (1)　$a\leqq 0$ のとき，N の最大値を求めよ．
>
> (2)　$N=6$ となるような点 (a, b) の範囲を ab 平面上に図示せよ．

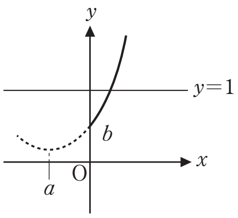
$$f(x)=x^2-2a|x|+b=\begin{cases} x^2-2ax+b=(x-a)^2-a^2+b & (x\geqq 0) & 軸：x=a \\ x^2+2ax+b=(x+a)^2-a^2+b & (x<0) & 軸：x=-a \end{cases}$$

$|f(x)|=1$ の解の個数，すなわち，$y=|f(x)|$ と $y=1$ のグラフの共有点の個数が N である．

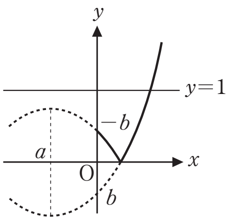
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$y=|f(x)|$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフの x 軸より下の部分を上に折り返したものである．
また，$f(-x)=f(x)$ より $f(x)$ は偶関数でありグラフは y 軸対称である．よって，$x>0$ の部分を考え，$x<0$ に適用する（$x=0$ のときは y 軸上の点であることにも注目する)．

(1)　$a\leqq 0$ のとき　下のグラフより Nの最大値は 4　($b<-1$)



$b\geqq 0$ のとき



$b<0$ のとき

(2)　$N=6$ となるのは(1)より $a>0$ のとき

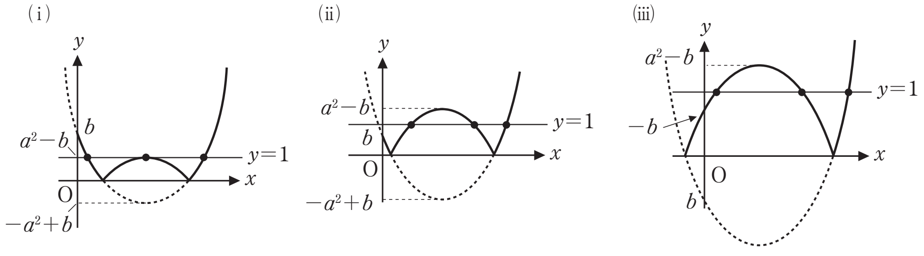
さらに，$x=0$ では $y=|f(x)|$ と $y=1$ のグラフが共有点をもたず，$x>0$ の部分で 3 個もつときを考える．

それは $y=|f(x)|$ グラフの頂点の y 座標 $-a^2+b>0$　つまり　$a^2-b>0$　のときである．

(i)　$0<a^2-b<b$ のとき　$a^2-b=1$

(ii)　$0\leqq b<a^2-b$ のとき　$b<1<a^2-b$

(iii)　$b<0$ のとき　$-b<1<a^2-b$

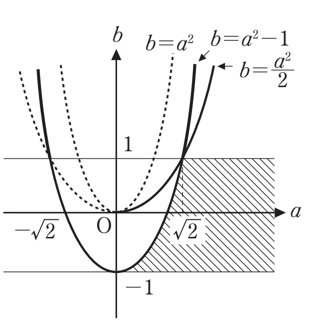


(i)〜(iii)より

$\dfrac{a^2}{2}<b<a^2$ のとき　$b=a^2-1$

$0\leqq b<\dfrac{a^2}{2}$ のとき　$\begin{cases} b<a^2-1 \\ b<1 \end{cases}$

$b<0$ のとき　$-1<b<a^2-1$



よって，求める範囲は上図の太線および斜線部分（境界は含まれない)．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2定点B，Cをそれぞれ，$(-1,\ 0)$，$(1,\ 0)$とする．点Aが直線$y=a$ $(a>0)$上を動くとき，次の各問いに答えよ．

(1)　△ABCの垂心（三角形の3頂点から対辺に下ろした垂線の交点）Hのえがく図形の方程式を求めよ．

(2)　原点OとHの距離の最小値を求めよ．

(1)　$A(X,\ a)$とおくと，$X\neq-1$のときABの傾きは　$\dfrac{a}{X+1}$

よって，Cを通るABの垂線は　$y=\dfrac{-(X+1)}{a}(x-1)$

これは　$X=-1$のときも成り立つ．

点Hはこの直線上にあり，かつ，x座標$=X$である点である．

点Hのy座標は　$y=\dfrac{-(X+1)}{a}(X-1)=-\dfrac{1}{a}X^2+\dfrac{1}{a}$

よって　$H\left(X,\ -\dfrac{1}{a}X^2+\dfrac{1}{a}\right)$　　これは放物線　$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{a}x^2+\dfrac{1}{a}}$をえがく．

(2)　$OH^2=X^2+\dfrac{1}{a^2}(X^2-1)^2$　　$x^2=t$とおくと　$t\geqq0$

$OH^2=t+\dfrac{1}{a^2}(t-1)^2=\dfrac{1}{a^2}\{t^2-(2-a^2)t+1\}=\dfrac{1}{a^2}\left\{\left(t-\dfrac{2-a^2}{2}\right)^2-\dfrac{(2-a^2)^2}{4}+1\right\}$

$=\dfrac{1}{a^2}\left(t-\dfrac{2-a^2}{2}\right)-\dfrac{1}{4}a^2+1$

$0\leqq\dfrac{2-a^2}{2}$　つまり　$\boldsymbol{0<a\leqq\sqrt{2}}$のとき　$t=\dfrac{2-a^2}{2}$で最小値　$\boldsymbol{\sqrt{-\dfrac{1}{4}a^2+1}}$

$\boldsymbol{\sqrt{2}<a}$のとき　$t=0$で最小値　$\boldsymbol{\dfrac{1}{a}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　高次方程式，証明

1 ［1］ a，b，c，d は正の実数で $a \geqq b \geqq c+d$ とするとき，$ad+bc$ と ab との大小を調べよ．

$a \geqq b \geqq c+d>0$ のとき　$ab \geqq a(c+d)=ac+ad \geqq bc+ad$

等号成立は　$a=b=c+d$ のとき　　ゆえに　$\boldsymbol{ab \geqq ad+bc}$

1 ［2］ $f(x)=x^3-3x+1$ とおき，3 次方程式 $f(x)=0$ の 1 つの解を α とする．

(1) $f(\alpha^2-2)$ の値を求めよ．

(2) 2 次方程式 $x^2-\alpha x+1=0$ の 1 つの解を β とするとき，$\beta^3+\dfrac{1}{\beta^3}$ の値を求めよ．

$f(x)=x^3-3x+1=0$ の解の 1 つが α より　$\alpha^3-3\alpha+1=0$

(1) $f(\alpha^2-2)=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1=(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)=\mathbf{0}$

(2) $x^2-\alpha x+1=0$ の解の 1 つが $\beta\ (\neq 0)$ より　$\beta^2-\alpha\beta+1=0$　　$\beta-\alpha+\dfrac{1}{\beta}=0$　　$\beta+\dfrac{1}{\beta}=\alpha$

よって　$\beta^3+\dfrac{1}{\beta^3}=\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)^3-3\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)=\alpha^3-3\alpha=\mathbf{-1}$

2 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の 1 つの解が他の解の 3 乗になるためには

$$p^2(p^2-4q)=q(q-1)^2$$

が必要十分条件であることを証明せよ．

2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の 2 解が α，α^3 のとき，解と係数の関係より

$$\alpha+\alpha^3=-p,\ \alpha\cdot\alpha^3=q$$

このとき

$$\begin{aligned}p^2(p^2-4q)&=(\alpha+\alpha^3)^2\{(\alpha+\alpha^3)^2-4\alpha^4\}=\{\alpha(\alpha^2+1)\}^2\{(\alpha^3+\alpha+2\alpha^2)(\alpha^3+\alpha-2\alpha^2)\}\\&=\alpha^4(\alpha^2+1)^2(\alpha+1)^2(\alpha-1)^2\end{aligned}$$

$$q(q-1)^2=\alpha^4(\alpha^4-1)^2=\alpha^4(\alpha^2+1)^2(\alpha+1)^2(\alpha-1)^2$$

よって　$p^2(p^2-4q)=q(q-1)^2$ が成り立つ．

逆に　$p^2(p^2-4q)=q(q-1)^2$　……①　が成り立つとき，$x^2+px+q=0$ の 2 解を α，β とすると

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$　これらを①に代入して

$$(\alpha+\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=\alpha\beta(\alpha\beta-1)^2$$

$$(\text{左辺})=(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2=\{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\}^2=(\alpha^2-\beta^2)^2=\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4$$

$$(\text{右辺})=\alpha\beta(\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta+1)=\alpha^3\beta^3-2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta$$

よって　$\alpha^4+\beta^4=\alpha^3\beta^3+\alpha\beta$　　$\alpha^3(\alpha-\beta^3)-\beta(\alpha-\beta^3)=0$　　$(\alpha-\beta^3)(\alpha^3-\beta)=0$

したがって，$\alpha=\beta^3$　または　$\beta=\alpha^3$　より，1 解が他の解の 3 乗となる．

以上より必要十分条件であることが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　a，b，c は $a^2-3b^2=c^2$ を満たす整数とするとき，次のことを証明せよ．

(1)　a，b の少なくとも一方は偶数である．

(2)　a，b が共に偶数なら，少なくとも一方は 4 の倍数である．

(3)　a が奇数なら b は 4 の倍数である．

$a^2-3b^2=c^2$　……①　以下 l，m，n を整数とする．

(1)　a，b がともに奇数のとき $a=2m+1$，$b=2n+1$　とおくと

$$a^2-3b^2=(2m+1)^2-3(2n+1)^2=4(m^2+m-3n^2-3n-1)+2$$

よって，a^2-3b^2 は 4 で割ると 2 余る数である．

c が偶数 $(c=2l)$ のとき　$c^2=4l^2$　これは，4 で割り切れる数

c が奇数 $(c=2l+1)$ のとき　$c^2=4(l^2+l)+1$　これは，4 で割ると 1 余る数

よって，$a^2-3b^2=c^2$ であることに反する．ゆえに背理法により題意は示された．

(2)　a，b が共に偶数のとき　$a=2m$，$b=2n$　とおくと

①より　$4(m^2-3n^2)=c^2$

よって，c^2 は 4 の倍数となり(1)より c は偶数　　よって，$c=2l$ とおける

このとき　$4(m^2-3n^2)=(2l)^2$　　$m^2-3n^2=l^2$

したがって，(1)より m，n の少なくとも一方は偶数

ゆえに，a，b は少なくとも一方が 4 の倍数である．

(3)　a が奇数のとき(1)より b は偶数である．よって　$a=2m+1$，$b=2n$ とおく．

①より　$(2m+1)^2-3(2n)^2=c^2$　　よって　$c^2=4(m^2+m-3n^2)+1$

(1)より，c は奇数である．よって，$c=2l+1$ とおける．

このとき　$(2l+1)^2=4(m^2+m-3n^2)+1$

つまり　$3n^2=m^2+m-l^2-l=m(m+1)-l(l+1)$

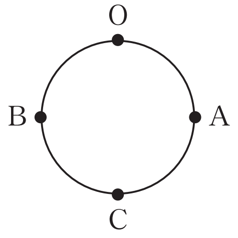
隣接 2 整数の積は偶数である．よって n^2 は偶数より整数 n は偶数である．

ゆえに b は 4 の倍数である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　場合の数・確率

$\boxed{1}$　図のように円周上に４点Ｏ，Ａ，Ｂ，Ｃがある．ある粒子はこの円周上を点Ｏを出発して，時計回りに確率 $\frac{2}{3}$ でとなりの点に，反時計回りに確率 $\frac{1}{3}$ でとなりの点に移動する．



(1)　この粒子が４回の移動までにＡ，Ｂ，Ｃすべての点を訪問する確率を求めよ．

(2)　この粒子が n 回の移動までにＣを訪問しない確率を求めよ．

時計回り，反時計回りに移動することをそれぞれＲ，Ｌと表す．

Ｒ，Ｌが起こる確率がそれぞれ $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$ である．

(1)　Ａ，Ｂ，Ｃのすべての点を訪問するには少なくとも３回の移動が必要である．

３回目で満たすのは 順にRRRまたはLLLのとき

４回目で満たすのは 順にRLLLまたはLRRRのとき

よって，求める確率は

$$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}+\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}=\mathbf{\frac{37}{81}}$$

(2)　Ｃを訪問しないのはＯを出発して

① RL　② LRのいずれかを繰り返すとき．

いずれも２回セットで，その確率は $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ である．

また，Ｃには偶数回目にのみ訪問可能である．

(i)　n が偶数のとき

$n=2m$ とおくと，題意を満たすのは①または②を m 回繰り返すときで，

その確率は　$\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\right)^m=\left(\frac{4}{9}\right)^m=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

(ii)　n が奇数のとき

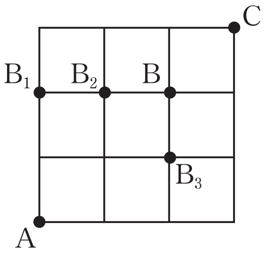
$n=2m+1$ とおくと，①または②を m 回繰り返せばＯにいる．よってあとの１回はＲ，Ｌ任意で題意を満たす．

その確率は　$\left(\frac{4}{9}\right)^m\times 1=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^{\frac{n-1}{2}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

以上より，　**n が偶数のとき**　$\left(\frac{2}{3}\right)^n$　　**n が奇数のとき**　$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　右の図のような格子状の道路がある．左下のA地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むとする．1の目が出たら右に2区画，2の目が出たら右に1区画，3の目が出たら上に1区画進み，その他の場合はそのまま動かない．ただし，右端で1または2の目が出たとき，あるいは上端で3の目が出たときは，動かない．また，右端の1区画手前で1の目が出たときは，右端まで進んで止まる．



nを8以上の自然数とする．A地点から出発し，サイコロをn回振るとき，ちょうど6回目に，B地点以外の地点から進んでB地点に止まり，n回目までにC地点に到達する確率を求めよ．ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする．

1の目が出ることを　⇒　$\left(確率\frac{1}{6}\right)$　　2の目が出ることを　→　$\left(確率\frac{1}{6}\right)$

3の目が出ることを　↑　$\left(確率\frac{1}{6}\right)$　　4，5，6の目が出ることを ×　$\left(確率\frac{1}{2}\right)$ と表す．

AをＢ出発してBに止まるのは，右に2つ，上に2つ進むとき．

6回目でちょうどBに止まるのは，5回目終了時点で

(i)　B_1にいて，6回目に⇒　　(ii)　B_2にいて，6回目に→　　(iii)　B_3にいて，6回目に↑

のいずれかのときである．

(i)のとき ↑，↑，×，×，×の順列を考えて，確率は　$\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{144}\cdot\frac{1}{6}$

(ii)のとき ↑，↑，→，×，×の順列を考えて，確率は　$\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{5}{144}\cdot\frac{1}{6}$

(iii)　のとき ⇒，↑，×，×，×　または　→，→，↑，×，×の順列を考えて，確率は

$$\left\{\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{10}{144}+\frac{5}{144}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{15}{144}\cdot\frac{1}{6}$$

(i)〜(iii)より，ちょうど6回目にBに止まる確率は　$\left(\frac{5}{144}+\frac{5}{144}+\frac{15}{144}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{864}$

次に，Bを出発して$n-6$回振るまでにCに達するのは

事象P：⇒　または　→が1回以上　　事象Q：↑が1回以上　とすると，$P\cap Q$のときである．

ここで

$\overline{P}$：すべて「↑　または　×」　$\overline{Q}$：すべて「⇒　または　→　または　×」　$\overline{P}\cap\overline{Q}$：すべて ×

であることより，$\overline{P\cap Q}=\overline{P}\cup\overline{Q}$の確率は　$\left(\frac{4}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$

ゆえに，求める確率は　$\boldsymbol{\frac{25}{864}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}\right\}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 「上の欄の項目に関係ある項目を下の欄から選び，これを線で結べ」という問題において，上欄には3個の項目 A，B，C があり，下欄には $n+3$ 個の項目がある．下欄の項目のうちには A，B，C に関係あるものがそれぞれ1つずつあり，他の n 個は A，B, C のどれにも関係のない項目である．いま，でたらめに下欄の項目から3個を選び，項目 A，B，C と結んだとき，次の問いに答えよ．ただし n は0以上の整数とする．

(1) 2本の線のみが正しい解答になっている確率を求めよ．

(2) 1本の線のみが正しい解答になっている確率を求めよ．

(3) 正しい解答の線にそれぞれ2点を与え，6点満点とするとき，でたらめな解答者の得点の期待値を1点以下にしたい．n をいくら以上にすればよいか．

下の項目を a，b，c，d,……とし，A－a，B－b，C－c が正しい解答の対応であるとする．

下の項目のすべての選び方は　${}_{n+3}\mathrm{C}_3\cdot 3!=(n+3)(n+2)(n+1)$（通り）．これを N とする．

(1) 2本の線のみが正しい解答になっているのは

a，b，c から2個選んで，対応する上の項目と結ぶ．その後，下の項目の残り n 個から1個選んで，残った上の項目と結ぶときである．それは　${}_3\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_1=3n$（通り）．

よって，求める確率は　$\dfrac{3n}{N}=\dfrac{\mathbf{3n}}{\mathbf{(n+3)(n+2)(n+1)}}$

(2) 1本の線のみが正しい解答になっているのは以下のいずれか．

(i) a，b，c を3個とも選び，その内1個のみ対応する上の項目と結び，残り2個は対応しないものと結ぶとき．その方法は　${}_3\mathrm{C}_1=3$（通り）

(ii) a，b，c から2個選び，その内1個のみ対応する上の項目と結び，もう1個はしないものと結ぶ．その後，下の項目の残り n 個から1個選んで，残った上の項目と結ぶとき．その方法は　${}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_1=6n$（通り）

(iii) a，b，c から1個選び，対応する上の項目と結ぶ．その後，残り n 個から2個選んで，残った上の項目2個と結ぶとき．その方法は ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2!=3n(n-1)$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{3+6n+3n(n-1)}{N}=\dfrac{\mathbf{3(n^2+n+1)}}{\mathbf{(n+3)(n+2)(n+1)}}$

(3) (1)の結果を P_2，(2)の結果を P_1 とする．

また，3本とも正しい対応となっている確率 P_3 は　$P_3=\dfrac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)}$

よって，この試行による得点の期待値 E は　$E=6\cdot P_3+4\cdot P_2+2\cdot P_1$

$E\leqq 1$ より　$6\cdot 1+4\cdot 3n+2\cdot 3(n^2+n+1)\leqq(n+3)(n+2)(n+1)$

$6(n+1)(n+2)\leqq(n+3)(n+2)(n+1)$

$n\geqq 0$ より　$6\leqq n+3$　　よって，n を3以上にすればよい．

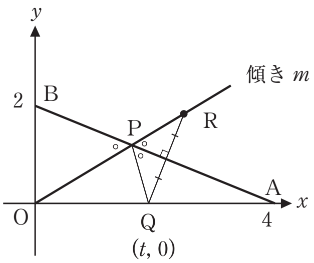
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　図形と方程式

1 ［1］ 2点 A(4, 0)，B(0, 2) を考える．線分 AB 上の点 P と x 軸上の点 Q が $\angle$OPB＝$\angle$QPA（O：原点）を満たしている．直線 OP の傾きを m として，Q の x 座標を m を用いて表せ．

Q(t, 0) とする．AB に関して Q を対称に移動した点を R とすると，右図より R は直線 OP 上にある．

よって R(s, ms) とおける．



QR の中点が直線 AB：$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$　の上にあるので

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{t+s}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{ms}{2}=1$$

よって　$t+(2m+1)s=8$　……①

また，QR⊥AB より　$\dfrac{ms}{s-t}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

よって　$2t+(m-2)s=0$　……②

①，②より　$s=\dfrac{16}{3m+4}$，$t=\dfrac{16-8m}{3m+4}$　　ゆえに　$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{-8m+16}{3m+4}},\ \mathbf{0}\right)$

1 ［2］ a を正の定数とする．y 軸上に定点 A(0, a)，および x 軸上に動点 P(p, 0) をとる．P を通る AP の垂線が y 軸と交わる点を Q とし，P に関する Q の対称点を R とする．点 P が x 軸上を動くとき，R はどんな曲線をえがくか．その方程式を求めよ．

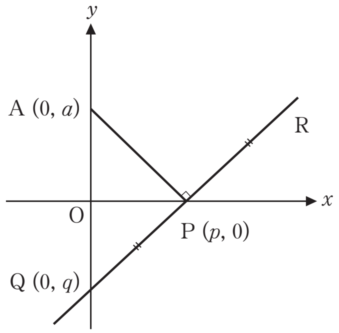
Q(0, q) とすると，$q\leqq 0$ である．

P は線分 QR の中点より　R($2p$, $-q$)　とおける．

また，AP⊥QP より　$p\neq 0$ のとき　$\dfrac{-a}{p}\cdot\dfrac{-q}{p}=-1$

つまり　$q=\dfrac{-p^2}{a}$　これは $p=0$ でも成り立つ．

よって　$\mathrm{R}\left(2p,\ \dfrac{p^2}{a}\right)$



ここで　$X=2p$，$Y=\dfrac{p^2}{a}$ とおくと　$p=\dfrac{X}{2}$　より

$$Y=\frac{1}{4a}X^2$$

ゆえに，求める軌跡は放物線で，その方程式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{4a}x^2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　次の問いに答えよ．

(1)　中心の座標が (a, b) で半径が r である円周上の点 (x_1, y_1) において，この円に引いた接線の方程式は

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

として表されることを証明せよ．

(2)　円 $x^2+y^2=4$ 上の同一直径上にない異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ において，この円に引いた 2 接線の交点を R とする．点 P，Q を結ぶ直線の方程式を $Ax+By=1$ と表したとき点 R の座標を A，B を用いて表せ．

(3)　直線 $Ax+By=1$ が円 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ に接しながら動くとき，点 R はどんな曲線上にあるか．その方程式を求めよ．

(1)　題意の接線上にある点を (X, Y) とする．

(x_1, y_1) が円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点より　$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$　……①

また，ベクトル　$(x_1-a,\ y_1-b)\perp(X-x_1,\ Y-y_1)$ より

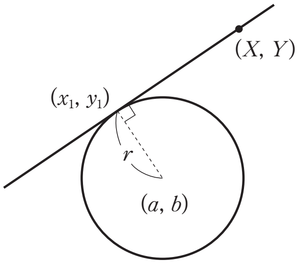
$$(x_1-a)(X-x_1)+(y_1-b)(Y-y_1)=0$$

$$(x_1-a)\{(X-a)-(x_1-a)\}+(y_1-b)\{(Y-b)-(y_1-b)\}=0$$

$$(x_1-a)(X-a)+(y_1-b)(Y-b)=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$$

①より　$(x_1-a)(X-a)+(y_1-b)(Y-b)=r^2$

これが (X, Y) の満たす軌跡の方程式である．よって示された．



(2)　$\mathrm{R}(s,\ t)$ とおく．

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ における接線はそれぞれ

$x_1x+y_1y=4$，$x_2x+y_2y=4$ と表せる．

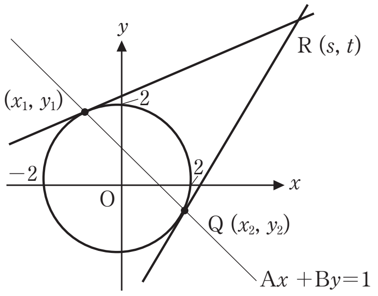
これらがともに $\mathrm{R}(s,\ t)$ を通るので

$x_1s+y_1t=4$，$x_2s+y_2t=4$

つまり　$sx_1+ty_1=4$，$sx_2+ty_2=4$

これらは，$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ が

直線 $sx+ty=4$ 上にあることを示している．



よって，直線 PQ の方程式は $\frac{s}{4}x+\frac{t}{4}y=1$ と表される．これを $Ax+By=1$ と比較して

$A=\frac{s}{4}$，$B=\frac{t}{4}$　つまり　$s=4A$，$t=4B$　ゆえに　**R $(4A, 4B)$**

(3)　直線 $Ax+By=1$　すなわち　$sx+ty=4$ が　$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ に接するとき

この円の中心 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ と $sx+ty-4=0$ の距離が円の半径 $\frac{1}{2}$ と等しい．

よって　$\dfrac{\left|\frac{1}{2}t-4\right|}{\sqrt{s^2+t^2}}=\dfrac{1}{2}$　　$2\left|\frac{1}{2}t-4\right|=\sqrt{s^2+t^2}$　　$|t-8|=\sqrt{s^2+t^2}$

$t^2-16t+64=s^2+t^2$　　ゆえに　$t=-\frac{1}{16}s^2+4$

したがって，点 $\mathrm{R}(s,\ t)$ は放物線　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{16}x^2+4}$　上にある．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$1<p\leqq 3$ のとき，すべての実数 x に対して $\sin^2 x+p\sin x+q\geqq 0$ が成り立つとする．このとき，点 $(p,\ q)$ のえがく範囲を図示せよ．さらに p，q がこの条件を満たすとき，$\dfrac{q+2}{p-1}$ の最小値を求めよ．

$1<p\leqq 3$ のとき，すべての実数 x で　$\sin^2 x+p\sin x+q\geqq 0$　が成り立つ．

$\sin x=t$ とおくと，$t^2+pt+q\geqq 0$　が　$-1\leqq t\leqq 1$ であるすべての t で成り立つ．

$$f(t)=t^2+pt+q=\left(t+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q$$　とおくと，グラフの軸は　$t=-\dfrac{p}{2}$

$1<p\leqq 3$ より　$-3\leqq -p<-1$　　よって　$-\dfrac{3}{2}\leqq$ 軸 $<-\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{p}{2}<-1$　つまり　$2<p\leqq 3$　のとき　$f(t)$ の最小値は　$f(-1)=1-p+q$

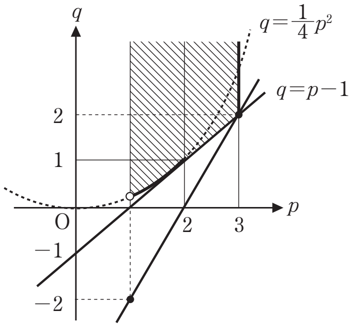
よって　$f(-1)\geqq 0$　より　$q\geqq p-1$

$1<p\leqq 2$ のとき　$f(t)$ の最小値は　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=-\dfrac{p^2}{4}+q$

よって　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right)\geqq 0$　より　$q\geqq \dfrac{p^2}{4}$

よって点 $(p,\ q)$ の描く軌跡は右図斜線部分

（境界は $x=1$ 上の点を除き含む）



$\dfrac{q+2}{p-1}=k$ とおくと，$q=k(p-1)-2$

これは点 $(1,\ -2)$ を通る直線である．これが図の斜線部の領域を通るときの傾き k の最小値を求める．

図より，それはこの直線が点 $(3,\ 2)$ を通るときである．

ゆえに　$k=\dfrac{2+2}{3-1}=\mathbf{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法・積分法

$\boxed{1}$　a を整数とする．直線 $y=2(x-1)$ が曲線 $y=ax^3+(1-2a)x$　$(a\neq 0)$ に接するように a の値を定めよ．また，この２つのグラフによって囲まれる部分の面積を求めよ．

$y=ax^3+(1-2a)x$　より　$y'=3ax^2+(1-2a)$

$x=t$ におけるこの曲線の接線の方程式は　$y=(3at^2+1-2a)(x-t)+at^3+(1-2a)t$

つまり　$y=(3at^2+1-2a)x-2at^3$　である．

これが　$y=2x-2$ と一致するのは

$3at^2+1-2a=2$　……①　かつ　$-2at^3=-2$　……②　のとき

①より　$(3t^2-2)a=1$　　②より　$t^3a=1$

よって　$(3t^2-2)a=t^3a$　　$a\neq 0$ より　$3t^2-2=t^3$　すなわち　$t^3-3t^2+2=0$

$(t-1)(t^2-2t-2)=0$　　$t=1,\ 1\pm\sqrt{3}$

$t=1$ のとき　$a=1$　　$t=1\pm\sqrt{3}$ のとき　$a=\dfrac{1}{(1\pm\sqrt{3})^3}=\dfrac{-5\pm 3\sqrt{3}}{4}$　　よって，不適.

ゆえに　$a=1$

このとき，曲線の方程式は $y=x^3-x$，接線の方程式は　$y=2x-2$

これらの共有点の x 座標は　$x^3-x=2x-2$　　$(x-1)^2(x+2)=0$　　よって　$x=-2,\ x=1$

ゆえに２つのグラフによって囲まれる部分の面積は

$$\int_{-2}^{1}(x-1)^2(x+2)dx=\int_{-2}^{1}(x-1)^2\{(x-1)+3\}dx=\int_{-2}^{1}\{(x-1)^3+3(x-1)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_{-2}^{1}=-\left\{\frac{1}{4}(-3)^4+(-3)^3\right\}=\mathbf{\frac{27}{4}}$$

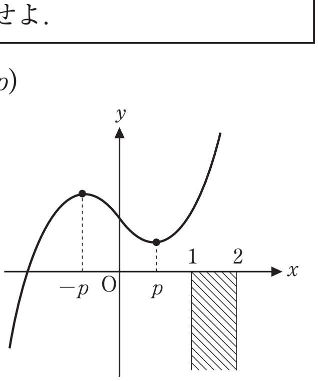
$\boxed{2}$　xy 平面において，不等式 $y\leqq x^3-3p^2(x-2)-q$ で定まる領域を D，不等式 $1\leqq x\leqq 2$，$y\leqq 0$ で定まる領域を E とする．E が D に含まれるための p，q についての条件を求めよ．また，この条件をみたす $(p,\ q)$ の領域を pq 平面に図示せよ．

$f(x)=x^3-3p^2(x-2)-q$　とおくと　$f'(x)=3x^2-3p^2=3(x+p)(x-p)$

$f(x)$ を p の関数とみると偶関数より，$p>0$ のときを考える．

領域 D は $y=f(x)$ のグラフの下側であり，

領域 E は右図斜線部．ともに境界含む.



よって，E が D に含まれるのは以下.

(i)　$0<p<1$ のとき　$f(1)\geqq 0$　$3p^2+1-q\geqq 0$　つまり　$q\leqq 3p^2+1$

(ii)　$1\leqq p\leqq 2$ のとき　$f(p)\geqq 0$　$-2p^3+6p^2-q\geqq 0$

つまり　$q\leqq -2p^3+6p^2=-2p^2(p-3)$

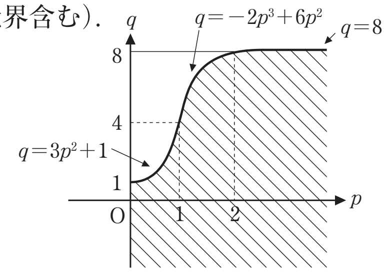
(iii)　$2<p$ のとき　$f(2)\geqq 0$　$8-q\geqq 0$　　つまり　$q\leqq 8$

$p=0$ のときも(i)と同様である.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$p \geqq 0$ のとき (p, q) の満たす領域は右図斜線部（境界含む）.

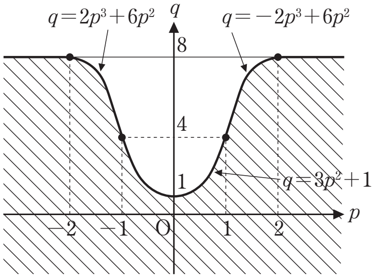


これを $p=0$ に関して折り返した図形が求める領域である.

ゆえに，条件をみたす (p, q) の領域は

$$\begin{cases} -1<p<1 \text{ のとき} & q \leqq 3p^2+1 \\ 1 \leqq p \leqq 2 \text{ のとき} & q \leqq -2p^3+6p^2 \\ -2 \leqq p \leqq -1 \text{ のとき} & q \leqq 2p^3+6p^2 \\ p<-2,\ 2<p \text{ のとき} & q \leqq 8 \end{cases}$$

である．図示すると右図斜線部分（境界含む）.

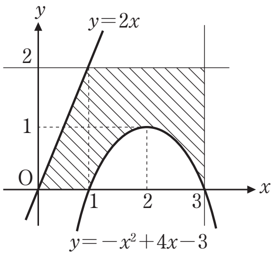


3　平面上で不等式 $0 \leqq y \leqq 2x \leqq 6$ および $-x^2+4x-3 \leqq y \leqq 2$ を同時に満たす領域を D とする.

(1)　a は $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲の定数とする．このとき，不等式 $a \leqq x \leqq a+1$ を満たす領域と D との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ.

(2)　a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値および最小値を求めよ.

領域 D は右図斜線部分．境界含む.



(1)　$0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$$S(a)=\int_a^1 2xdx+\int_1^{a+1}\{2-(-x^2+4x-3)\}dx$$

$$=[x^2]_a^1+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_1^{a+1}$$

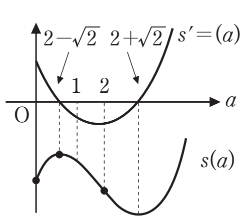
$$=1-a^2+\frac{1}{3}\{(a+1)^3-1^3\}-2\{(a+1)^2-1^2\}+5\{(a+1)-1\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}a^3-2a^2+2a+1}$$

$1 \leqq a \leqq 2$ のとき　$S(a)=\displaystyle\int_a^{a+1}\{2-(-x^2+4x-3)\}dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_a^{a+1}=\boldsymbol{a^2-3a+\frac{10}{3}}$

(2)　(i)　$0 \leqq a \leqq 1$ のとき　$S'(a)=a^2-4a+2$　　$a=2\pm\sqrt{2}$ のとき　$S'(a)=0$

よって，最大値は　$S\left(2-\sqrt{2}\right)$



ここで　$S(a)=S'(a)\cdot\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}\right)-\frac{4}{3}a+\frac{7}{3}$　より

$$S\left(2-\sqrt{2}\right)=-\frac{4}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)+\frac{7}{3}=\frac{-1+4\sqrt{2}}{3}$$

$S(0)=1$，$S(1)=\frac{4}{3}$，より，最小値は 1

(ii)　$1 \leqq a \leqq 2$ のとき $S(a)=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{12}$　最大値　$S(1)=S(2)=\frac{4}{3}$　最小値　$S\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{12}$

(i)(ii)より，$S(a)$ の最大値は　$\boldsymbol{\frac{-1+4\sqrt{2}}{3}}$　最小値は　**1**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　指数・対数・三角関数

> **1**　［1］　a，b，c をそれぞれ 1 より大きい数とする．このとき，
> $1<\log_{ab} a+\log_{bc} b+\log_{ca} c<2$ であることを示せ．

$$\log_{ab}a+\log_{bc}b+\log_{ca}c=\frac{1}{\log_a ab}+\frac{1}{\log_b bc}+\frac{1}{\log_c ca}=\frac{1}{1+\log_a b}+\frac{1}{1+\log_b c}+\frac{1}{1+\log_c a}\quad\cdots\cdots①$$

$\log_a b=A$，$\log_b c=B$，$\log_c a=C$ とおくと，$A>0$，$B>0$，$C>0$

また，$ABC=\dfrac{\log_k b}{\log_k a}\cdot\dfrac{\log_k c}{\log_k b}\cdot\dfrac{\log_k a}{\log_k c}=1$

よって

$$①=\frac{1}{1+A}+\frac{1}{1+B}+\frac{1}{1+C}=\frac{(1+B)(1+C)+(1+C)(1+A)+(1+A)(1+B)}{(1+A)(1+B)(1+C)}$$

$$=\frac{AB+BC+CA+2(A+B+C)+3}{AB+BC+CA+A+B+C+2}$$ この分数の分母，分子はともに正

（分子）－（分母）$=A+B+C+1>0$　より　（分子）＞（分母）　ゆえに　① >1

2（分母）－（分子）$=AB+BC+CA+1>0$　より　2（分母）＞（分子）ゆえに　① <2

以上より　$1<\log_{ab} a+\log_{bc} b+\log_{ca} c<2$　である．

> **1**　［2］　次の連立方程式を解け．
>
> $$\begin{cases} x^y=y^x & \cdots\cdots① \\ \log_x y+\log_y x=\dfrac{13}{6} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

底の条件より　$x>0$，$x\neq1$，$y>0$，$y\neq1$　これは，真数条件を満たす．

①より　$y=\log_x y^x=x\log_x y$　　よって　$\log_x y=\dfrac{y}{x}$　これを t とおく　$(t>0,\ t\neq1)$．

②より　$\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}=\dfrac{13}{6}$　　$t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{13}{6}$　　$6t^2-13t+6=0$　　よって　$t=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{2}{3}$

$t=\dfrac{3}{2}$のとき　$\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2}$　　$y=\dfrac{3}{2}x$　　また，①より　$y=x^{\frac{y}{x}}=x^{\frac{3}{2}}$

よって　$x^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}x$　　$x^3=\dfrac{9}{4}x^2$　　よって　$x=\dfrac{9}{4}$　　このとき　$y=\dfrac{27}{8}$

$t=\dfrac{2}{3}$のとき　$\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{3}$　　$y=\dfrac{2}{3}x$　　また，①より　$y=x^{\frac{y}{x}}=x^{\frac{2}{3}}$

よって　$x^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}x$　　$x^2=\dfrac{8}{27}x^3$　　よって　$x=\dfrac{27}{8}$　　このとき　$y=\dfrac{9}{4}$

以上より　$(x,\ y)=\left(\dfrac{9}{4},\ \dfrac{27}{8}\right)$，$\left(\dfrac{27}{8},\ \dfrac{9}{4}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　(1)　$x \leqq \log_2 \dfrac{x^3-1}{x^3} \leqq 1$ を満たす x の範囲を求めよ．

(2)　xy 平面において，x 座標が(1)を満たす点の集合と $3x \leqq y \leqq x^3+2$ で表される図形との共通部分の面積を求めよ．

(1)　真数条件より　$\dfrac{x^3-1}{x^3}>0$　……①

$x \leqq \log_2 \dfrac{x^3-1}{x^3}$　より　$2^x \leqq \dfrac{x^3-1}{x^3}$　……②　①は②に含まれる．

$\log_2 \dfrac{x^3-1}{x^3} \leqq 1$　より　$\dfrac{x^3-1}{x^3} \leqq 2$　$x(x^3-1) \leqq 2x^4$　　$x^4+x \geqq 0$

$x(x+1)(x^2-x+1) \geqq 0$　　$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$　より　$x \leqq -1$，$0<x$

$x>0$ のとき　②の左辺 >1，②の右辺 $=1-\dfrac{1}{x^3}<1$　より不適.

$x \leqq -1$ のとき　②の左辺 $\leqq \dfrac{1}{2}$，②の右辺 $=1-\dfrac{1}{x^3}>1$　より適する．

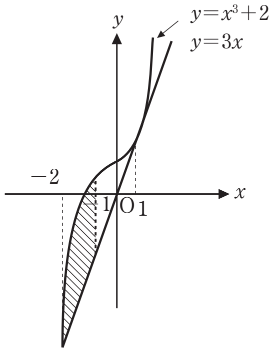
以上より，求める x の範囲は　$\boldsymbol{x \leqq -1}$

(2)　$y=3x$ と $y=x^3+2$ の共有点のグラフの x 座標は　$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$　より　$x=1, -2$

よって，求める図形（右図斜線部分）の面積 S は

$$S=\int_{-2}^{-1}(x^3+2-3x)dx=\left[\frac{x^4}{4}+2x-\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}=\boldsymbol{\frac{11}{4}}$$



3　単位円上の点 (a, b) $(a^2+b^2=1)$ から，放物線 $y=x^2$ へ異なる 2 本の接線が引けるとき，この 2 本の接線と $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を最大にしたい．このような点 (a, b) を求めよ．

(a, b) は単位円上の点より，$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$ とおける．

C：$y=x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

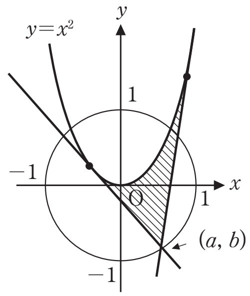
$y=2t(x-t)+t^2$　つまり　$y=2tx-t^2$

これが (a, b) を通るので　$b=2ta-t^2$　　つまり　$t^2-2at+b=0$

題意より，この t の 2 次方程式は異なる 2 実数解 α，β $(\alpha<\beta)$ をもつ．

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2a=2\cos\theta$，$\alpha\beta=b=\sin\theta$

題意の面積 S は



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$S=\int_{\alpha}^{a}\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}dx+\int_{a}^{\beta}\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{a}+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{a}^{\beta}=\frac{1}{3}(a-\alpha)^3-\frac{1}{3}(a-\beta)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^3=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$

ここで　$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=4\cos^2\theta-4\sin\theta=-4\sin^2\theta-4\sin\theta+4$

$$=-4\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2+5\quad(-1\leqq\sin\theta\leqq1)$$ より

S は $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大となる．ゆえに　$(a,\ b)=(\cos\theta,\ \sin\theta)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　ベクトル

$\boxed{1}$　[1]　短針の長さが１，長針の長さが２の時計がある．短針を$\vec{a}$，長針を$\vec{b}$とするとき，点$(|\vec{a}+\vec{b}|,\ \vec{a}\cdot\vec{b})$の動く範囲を求め，それを図示せよ．

$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2$　$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角を $\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\cos\theta$

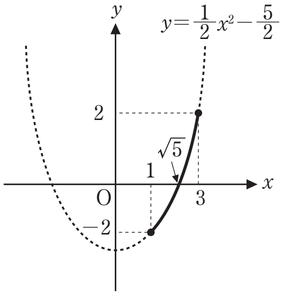
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1+4\cos\theta+4=5+4\cos\theta$$

$|\vec{a}+\vec{b}|=X$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=Y$ とすると　$X^2=5+4\cos\theta$，$Y=2\cos\theta$　　よって　$Y=\dfrac{1}{2}X^2-\dfrac{5}{2}$

また，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ より　$-2\leqq Y\leqq2$　さらに　$X>0$

よって，求める軌跡は右図．

つまり　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}}$　の $\boldsymbol{1\leqq x\leqq3}$ の部分である．

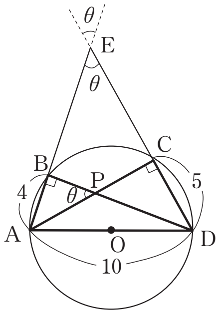


$\boxed{1}$　[2]　平面上に点Ｏを中心とする半径５の円がある．その周上に４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがこの順序にあり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が成り立つ．線分ACとBDの交点をＰとし，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とする．線分ABとDCの長さをそれぞれ4，5として，次の値を求めよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　(2)　$\cos\theta$　　(3)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$より，点Ａ，Ｄは直径の両端である．

よって　$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\angle\mathrm{BAD}$

$$=-5\times4\times\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{-8}$$

(2)　△ABPで　$\theta=180^\circ-90^\circ-\angle\mathrm{BAP}=90^\circ-\angle\mathrm{BAP}$

$$\cos\theta=\cos(90^\circ-\angle\mathrm{BAP})=\sin\angle\mathrm{BAP}$$

ここで　$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{BAD}-\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{BAD}-30^\circ$　より

$$\cos\theta=\sin(\angle\mathrm{BAD}-30^\circ)=\sin\angle\mathrm{BAD}\cos30^\circ-\cos\angle\mathrm{BAD}\sin30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}-2}{10}}$$

(3)　直線ABとCDの交点をＥとすると，△ABP∽△ACEより，$\angle\mathrm{AED}=\theta$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$のなす角は$\theta$である．　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=4\times5\times\cos\theta=\boldsymbol{6\sqrt{7}-4}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

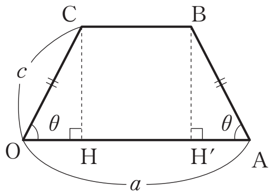
2 四角形OABCは辺OAを下底，辺CBを上底とし，∠AOCと∠OABが等しい等脚台形である．$a=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$，$c=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$，$m=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

(1) $m<\dfrac{a^2}{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) 等脚台形OABCの面積 S を a，c，m を用いて表せ．

(3) 対角線OBとACの交点をDとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(1) $\angle\mathrm{AOC}=\theta$ とおくと　$m=ac\cos\theta$



ここでC，BからAOに下ろした垂線の足をそれぞれH，

H′とすると，$m=a\times\mathrm{OH}$ である．

$\mathrm{OH}+\mathrm{AH'}<a$ であり，$\mathrm{OH}=\mathrm{AH'}$ より　$2\mathrm{OH}<a$

よって　$\mathrm{OH}<\dfrac{a}{2}$　　ゆえに　$m=a\times\mathrm{OH}<a\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2}{2}$　より示された．

(2) $m=ac\cos\theta$　より　$\cos\theta=\dfrac{m}{ac}$　　$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{m^2}{a^2c^2}}=\dfrac{\sqrt{a^2c^2-m^2}}{ac}$

$$\mathrm{BC}=\mathrm{HH'}=a-2\mathrm{OH}=a-2c\cos\theta=a-\frac{2m}{a}\quad(0<\theta<90^\circ)$$

ゆえに　$S=\dfrac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{BC})\times\mathrm{CH}=\left(a-\dfrac{m}{a}\right)\times c\times\dfrac{\sqrt{a^2c^2-m^2}}{ac}=\boldsymbol{\dfrac{(a^2-m)\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a^2}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})=k\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{a^2-2m}{a^2}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

DはAC上より　$k+\dfrac{a^2-2m}{a^2}k=1$　　$\left(1+\dfrac{a^2-2m}{a^2}\right)k=1$　　$k=\dfrac{a^2}{2(a^2-m)}$　$(a^2\neq m)$

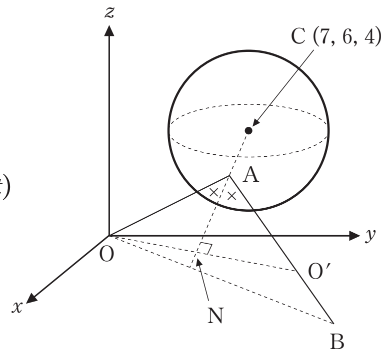
ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{a^2-2m}{2(a^2-m)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{a^2}{2(a^2-m)}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

【別解】　△OAD ∽ △BCD より　$\mathrm{CD}:\mathrm{DA}=\mathrm{BC}:\mathrm{OA}=\dfrac{a^2-2m}{a}:a=a^2-2m:a^2$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{a^2-2m}{2(a^2-m)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{a^2}{2(a^2-m)}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 点 (7, 6, 4) を中心とする半径 3 の球があり，その表面は鏡でできているものとする．いま，方向ベクトル (3, 2, 1) をもつ光が原点から発射されたとする．この光は球に到達し，到達点で反射した後，xy 平面を貫通するとする．このとき，その反射点と xy 平面を貫通した点の座標をそれぞれ求めよ．ただし，球面での光の反射はその点での法線（球の中心とその点を通る直線）と入射光線を含む平面内で起こり，入射角と反射角は等しいとする．



球の中心を C とする．

題意の球面の方程式は　$(x-7)^2+(y-6)^2+(z-4)^2=9$

入射光線の方向ベクトルは (3, 2, 1) より，反射点を A とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t(3,\ 2,\ 1)=(3t,\ 2t,\ t)$　　よって　A$(3t,\ 2t,\ t)$

これが球面上にあるので　$(3t-7)^2+(2t-6)^2+(t-4)^2=9$

$7t^2-37t+46=0$　　$t=\dfrac{23}{7},\ 2$　よって，反射点 A は

$t=2$ のときの **(6, 4, 2)** である．

次に，反射光線が xy 平面を貫通した点 B について，O を直線 AC に関して対称移動した点を O′ とすると $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AO'}}$ とおけ，その z 成分が 0 である．

ここで，直線 AC に O から下ろした垂線の足を N とすると

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(7,\ 6,\ 4)+k(-1,\ -2,\ -2)=(-k+7,\ -2k+6,\ -2k+4)$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　より　$(-k+7)+2(-2k+6)+2(-2k+4)=0$　　$k=3$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(4,\ 0,\ -2)$　であり　$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=2\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(8,\ 0,\ -4)$　より　O′$(8,\ 0,\ -4)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(6,\ 4,\ 2)+s(2,\ -4,\ -6)=(2s+6,\ -4s+4,\ -6s+2)$

この z 成分が 0 より　$-6s+2=0$　　$s=\dfrac{1}{3}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\dfrac{20}{3},\ \dfrac{8}{3},\ 0\right)$　　よって，貫通点 B は $\boldsymbol{\left(\dfrac{20}{3},\ \dfrac{8}{3},\ 0\right)}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　数列

1　数列 $\{a_n\}$ は任意の自然数 n に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1}3^{-k}a_{n-k}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\quad\cdots\cdots①$$

を満たしているとする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{m}na_n$ を求めよ．ただし，$m\geqq3$ とする．

$$\sum_{k=0}^{n-1}3^{-k}a_{n-k}=3^0a_n+3^{-1}a_{n-1}+3^{-2}a_{n-2}+\cdots\cdots+3^{-(n-2)}a_2+3^{-(n-1)}a_1=\sum_{i=1}^{n}3^{-n+i}a_i=3^{-n}\sum_{i=1}^{n}3^ia_i$$

よって，①より　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}3^ia_i=\frac{3^n}{n(n+1)(n+2)}$　$\cdots\cdots①'$

①′で，$n=1$ のとき　$3^1a_1=\dfrac{3^1}{1\cdot2\cdot3}$　よって　$a_1=\dfrac{1}{6}$

$n\geqq2$ のとき　①′$=S_n$ とおくと

$$S_n=3a_1+3^2a_2+\cdots\cdots+3^{n-1}a_{n-1}+3^na_n=\frac{3^n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$S_{n-1}=3a_1+3^2a_2+\cdots\cdots+3^{n-1}a_{n-1}=\frac{3^{n-1}}{(n-1)n(n+1)}$$

$(S_n-S_{n-1})\div3^n$ より　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}-\dfrac{1}{3(n-1)n(n+1)}$　これは $n=1$ では成り立たない．

$m\geqq3$ のとき　$\displaystyle\sum_{n=1}^{m}na_n=1\cdot a_1+\sum_{n=2}^{m}na_n=\frac{1}{6}+\sum_{n=2}^{m}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{3(n-1)(n+1)}\right\}$

$$=\frac{1}{6}+\sum_{n=2}^{m}\left\{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{m+2}\right)-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}-\frac{1}{m+2}+\frac{1}{6m}+\frac{1}{6(m+1)}$$

$$=\frac{3m(m+1)(m+2)-12m(m+1)+2(m+1)(m+2)+2m(m+2)}{12m(m+1)(m+2)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3m^3+m^2+4m+4}{12m(m+1)(m+2)}}$$

2　数列 が $\{a_n\}$

$a_1=2$，$a_2=0$，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2n-8$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

で定義されているとする．

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　a_n が最小となる n，およびその最小値 a_n を求めよ．

(1)　$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2n-8$　より　$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=2n-8$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと　$b_{n+1}-b_n=2n-8$，$b_1=a_2-a_1=-2$

よって　$n\geqq2$　のとき　$\displaystyle b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-8)=-2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-8(n-1)=n^2-9n+6$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$a_{n+1}-a_n=n^2-9n+6$　より　$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-9k+6)=2+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-9\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)$$

$$=\frac{1}{3}n^3-5n^2+\frac{32}{3}n-4$$

ゆえに　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{3}n^3-5n^2+\frac{32}{3}n-4}$　$\left(=\frac{1}{3}(n-2)(n^2-13n+6)\right)$

(2)　a_n の階差数列 b_n について

$b_n<0$ となるのは　$n^2-9n+6<0$　より　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 8$

よって　$n=9,\ 10,\ \cdots\cdots$　のとき　$b_n>0$

したがって　a_n は　$n=9$ のとき最小となる．その最小値は　$a_9=\boldsymbol{-70}$

3　次の問いに答えよ．

(1)　任意の正の整数 n に対して，不等式　$(n+6)^2<2^{n+5}$……①　が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

(2)　$1+3+5+\cdots\cdots+(2k+1)=2^k+4$　……②　を満たす正の整数 k を求めよ．

---

(1)　[I]　$n=1$ のとき，①の左辺 $=7^2=49$　　①の右辺 $=2^6=64$　より　①は成り立つ．

[II]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定する．つまり　$(k+6)^2<2^{k+5}$　が成り立つと仮定する．

$$2^{k+6}=2\cdot 2^{k+5}>2(k+6)^2$$

ここで　$2(k+6)^2-(k+7)^2=k^2+10k+23>0$　より　$(k+7)^2<2^{k+6}$

よって　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

[I][II] より　すべての自然数 n で①は成り立つ．

(2)　$1+3+5+\cdots\cdots+(2k+1)=\dfrac{(k+1)\{1+(2k+1)\}}{2}=(k+1)^2$ より　②は　$(k+1)^2=2^k+4$

ここで，①は　$\{(n+5)+1\}^2<2^{n+5}$ より　$n+5=k$ とおくと

$k \geqq 6$ のとき，$(k+1)^2<2^k$ が成り立つので，②を満たす k は存在しない．よって　$k \leqq 5$ である．

また，②の右辺は偶数より左辺も偶数．よって，$k+1$ が偶数，すなわち k が奇数に限られる．

$k=1$ のとき　②の左辺 $=2^2=4$　　②の右辺 $=2^1+4=6$　　よって不適

$k=3$ のとき　②の左辺 $=4^2=16$　　②の右辺 $=2^3+4=12$　　よって不適

$k=5$ のとき　②の左辺 $=6^2=36$　　②の右辺 $=2^5+4=36$

以上より　$\boldsymbol{k=5}$

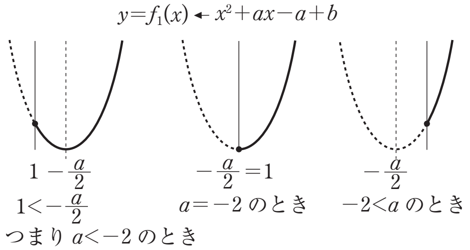
第９講　総合問題 (1)

1　x の方程式 $x^2+a|x-1|+b=0$ が異なる実数解をちょうど２個もつとき，点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面に図示せよ．

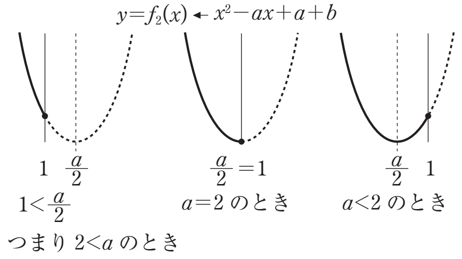
$$f(x)=x^2+a|x-1|+b=\begin{cases}x^2+a(x-1)+b=f_1(x) & (x\geqq 1)\\ x^2-a(x-1)+b=f_2(x) & (x<1)\end{cases}$$ とおく．

$x\geqq 1$ における $f_1(x)=0$ の解と $x<1$ における $f_2(x)=0$ の解が合計２個となるときを考える．

$$f_1(x)=x^2+ax-a+b$$
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-a+b\quad 軸: x=-\frac{a}{2}$$

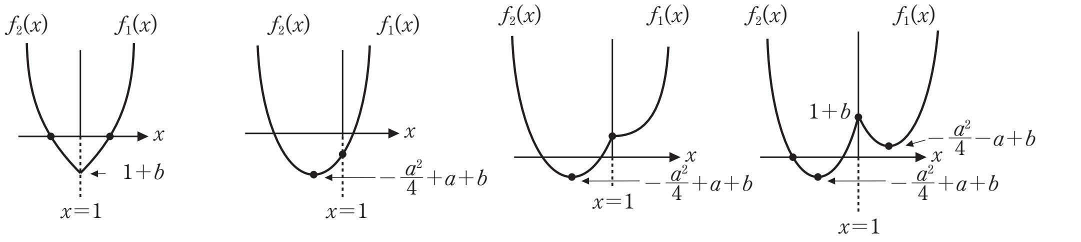


$$f_2(x)=x^2-ax+a+b$$
$$=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a+b\quad 軸: x=\frac{a}{2}$$



$f(1)=1+b$

$a>2$ のとき　　$-2<a\leqq 2$ のとき　　$a=-2$　のとき　　$a<-2$ のとき



$1+b<0$　　$-\frac{a^2}{4}+a+b<0$　　$-\frac{a^2}{4}+a+b<0$　　$-\frac{a^2}{4}+a+b<0<-\frac{a^2}{4}-a+b$

または　$1+b<0$

ゆえに a，b の満たすべき条件は

$a>2$ のとき　　$b<-1$

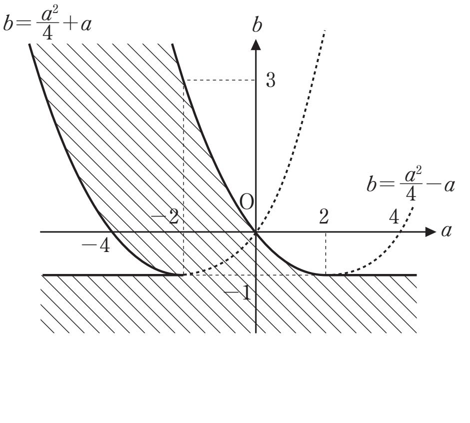
$-2\leqq a\leqq 2$ のとき　　$b<\frac{a^2}{4}-a$

$a<-2$ のとき　　$\frac{a^2}{4}+a<b<\frac{a^2}{4}-a$

または　$b<-1$

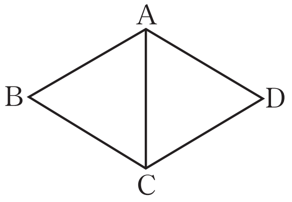
図示すると右図斜線部．境界は含まない．

ただし点 $(-2, -1)$ は含む．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　図のような4個の点A，B，C，Dを結んだ図形を考える．動点Pは点Aを出発点としてA，B，C，D上を移動する．PがAまたはCにいるときは，残りの3点にそれぞれ$\frac{1}{3}$の確率で移動し，PがBまたはDにいるときはA，Cにそれぞれ$\frac{1}{2}$の確率で移動する．n回の移動後にPがA，B，C，Dにいる確率をそれぞれa_n，b_n，c_n，d_nとする．



(1)　a_{n+1}，c_{n+1}をa_n，b_n，c_n，d_nを用いて表せ．

(2)　数列$\{a_n+c_n\}$，$\{a_n-c_n\}$の一般項を求めよ．

(3)　a_n，c_nを求めよ．

(1)　$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{2}d_n}$　……①　　$\boldsymbol{c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}d_n}$　……②

(2)　①＋②より　$a_{n+1}+c_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+c_n)+b_n+d_n$

ここで　$a_n+b_n+c_n+d_n=1$　より

$$a_{n+1}+c_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+c_n)+1-(a_n+c_n)=\boldsymbol{-\frac{2}{3}(a_n+c_n)+1}$$

$a_n+c_n=p_n$とおくと　$p_{n+1}=-\frac{2}{3}p_n+1$，$p_1=a_1+c_1=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$$p_{n+1}-\frac{3}{5}=-\frac{2}{3}\left(p_n-\frac{3}{5}\right),\ p_1-\frac{3}{5}=-\frac{4}{15}$$

よって　$p_n-\frac{3}{5}=-\frac{4}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに　$a_n+c_n=\boldsymbol{\frac{3}{5}-\frac{4}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}\left(=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$　……③

①－②より　$a_{n+1}-c_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_n-c_n)$，$a_1-c_1=-\frac{1}{3}$

ゆえに　$a_n-c_n=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$　……④

(3)　(③＋④)÷2より

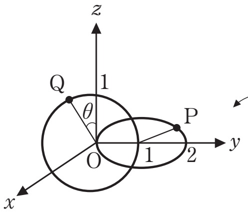
$$\boldsymbol{a_n=\frac{3}{10}-\frac{2}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}\left(=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

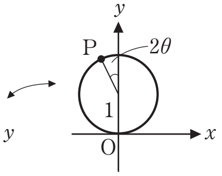
(③－④)÷2より

$$\boldsymbol{c_n=\frac{3}{10}-\frac{2}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}\left(=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 xyz 空間において，xy 平面上に点 $(0,\ 1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_1 が，yz 平面上に点 $(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．C_1 上の点 P と C_2 上の点 Q が，それぞれ点 $(0,\ 2,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ を出発点として C_1，C_2 上を正の向きに動く．点 P が点 Q の 2 倍の速さで動くとき，点 P，Q 間の距離の最大値を求めよ．





Q が θ だけ回ったとき，P は 2θ だけ回る．

よって　$\mathrm{P}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\theta\right),\ 1+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\theta\right),\ 0\right)$

すなわち　$\mathrm{P}(-\sin 2\theta,\ 1+\cos 2\theta,\ 0)$

$\mathrm{Q}\left(0,\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right),\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$

すなわち　$\mathrm{Q}(0,\ -\sin\theta,\ \cos\theta)$

ゆえに　$\mathrm{PQ}^2=\sin^2 2\theta+(1+\sin\theta+\cos 2\theta)^2+\cos^2\theta$

$=\sin^2 2\theta+1+\sin^2\theta+\cos^2 2\theta+2\sin\theta+2\sin\theta\cos 2\theta+2\cos 2\theta+\cos^2\theta$

$=3+2\sin\theta+2\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2(1-2\sin^2\theta)$

$=-4\sin^3\theta-4\sin^2\theta+4\sin\theta+5$

$\sin\theta=t$ とおくと　$-1\leqq t\leqq 1$

$\mathrm{PQ}^2=-4t^3-4t^2+4t+5=f(t)$　とおくと　$f'(t)=-12t^2-8t+4=-4(3t-1)(t+1)$

よって　$t=\dfrac{1}{3}$ で $f(t)$ は最大となる．

ゆえに，PQ の最大値は　$\sqrt{f\left(\dfrac{1}{3}\right)}=\sqrt{\dfrac{155}{27}}=\dfrac{\sqrt{465}}{9}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　総合問題 (2)

1　点 P$(s,\ t)$ は原点 O を中心とする半径 1 の円周上にあり，点 Q$(u,\ v)$ は点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円周上にある．P と Q が PQ$=1$ を保ちながら動くとき，次の問いに答えよ．

(1)　$s \neq 1$ のとき，u，v を s，t の式で表せ．

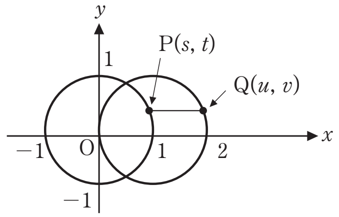
(2)　線分 PQ の中点の軌跡を図示せよ．

(1)　$s^2+t^2=1$　……①

$(u-1)^2+v^2=1$　　つまり　$u^2-2u+v^2=0$　……②

$(s-u)^2+(t-v)^2=1$　　つまり　$s^2-2su+u^2+t^2-2tv+v^2=1$　……③

③に①，②を代入して



$(1-s)u=tv$　　つまり　$(1-s)^2u^2=t^2v^2$

これに①を代入して　$(1-s)^2u^2=(1-s^2)v^2$　$s \neq 1$　より

$(1-s)u^2=(1+s)v^2$　……④

②より　$(1+s)(u-1)^2+(1+s)v^2=1+s$　……⑤

④を⑤に代入して　$(1+s)(u^2-2u+1)+(1-s)u^2=1+s$

$u^2-(1+s)u=0$　　$u=0,\ 1+s$

$u=0$ のとき，②より　$v^2=0$　ゆえに　$v=0$

$u=1+s$ のとき，③より　$1+(t-v)^2=1$　　$(t-v)^2=0$　　ゆえに　$v=t$

ところで，$u=1+s$ で $u=0$ のとき　$s=-1$　　このとき，①より　$t=0$　よって　$v=0$

よって　$(u,\ v)=(1+s,\ t)$　と集約できる．　ゆえに　$\boldsymbol{u=1+s}$，$\boldsymbol{v=t}$

(2)　PQ の中点を M とすると　$\mathrm{M}\left(\dfrac{s+u}{2},\ \dfrac{t+v}{2}\right)$　これを $(x,\ y)$ とする．

(i)　$s=1$ のとき　$t=0$　　よって　P$(1,\ 0)$

ゆえに　$x=\dfrac{u+1}{2}$，$y=\dfrac{v}{2}$　このとき，Q$(u,\ v)$ は②を満たすすべての点を動く．

よって，M の軌跡は　$(2x-2)^2+(2y)^2=1$　　ゆえに　$(x-1)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

(ii)　$u=0$ のとき　$v=0$　　よって　Q$(0,\ 0)$

ゆえに　$x=\dfrac{s}{2}$，$y=\dfrac{t}{2}$　　このとき　P$(s,\ t)$ は①を満たすすべての点を動く．

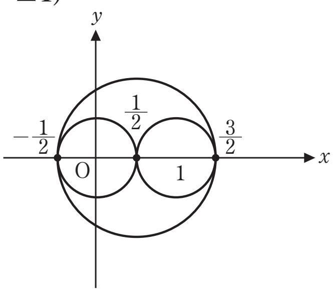
よって，M の軌跡は　$(2x)^2+(2y)^2=1$　　ゆえに　$x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

(iii)　$s \neq 1$　かつ　$u \neq 0$ のとき　(1)より　$u=1+s$，$v=t$　$(s \neq \pm 1)$

ゆえに　$x=\dfrac{2s+1}{2}$，$y=t$　このとき，P$(s,\ t)$ は

①上の $(\pm 1,\ 0)$ 以外のすべての点を動く．

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=1$　　$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を除く．



ただし，この 2 点は(i)，(ii)に含まれる．

よって，求める軌跡は右図実線部分．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$t \geqq 1$ において，関数

$$f(t)=\int_{-1}^{1}|(x-t+2)(x+t)|dx$$

を最小にする t の値と，そのときの最小値を求めよ．

$y=(x-t+2)(x+t)$　$t \geqq 1$　より　$t-2 \geqq -1$，$-t \leqq -1$

$t-2 \geqq 1$　つまり　$t \geqq 3$ のとき

$$f(t)=\int_{-1}^{1}-(x-t+2)(x+t)dx=\int_{-1}^{1}(-x^2-2x+t^2-2t)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+t^2-2t)dx=2\left[-\frac{1}{3}x^3+(t^2-2t)x\right]_0^1=2\left(t^2-2t-\frac{1}{3}\right)=2(t-1)^2-\frac{8}{3}$$

$f(t)$ はこの範囲において単調増加．よって，最小値は　$f(3)=\dfrac{16}{3}$

$1 \leqq t \leqq 3$ のとき

$$f(t)=\int_{-1}^{t-2}-(x-t+2)(x+t)dx+\int_{t-2}^{1}(x-t+2)(x+t)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+(t^2-2t)x\right]_{-1}^{t-2}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-(t^2-2t)x\right]_{t-2}^{1}$$

$$=-\frac{1}{3}(t-2)^3-(t-2)^2+t(t-2)^2-\left(\frac{1}{3}-1-t(t-2)\right)$$

$$+\frac{1}{3}+1-t(t-2)-\left\{\frac{1}{3}(t-2)^3+(t-2)^2-t(t-2)^2\right\}$$

$$=-\frac{2}{3}(t-2)^3-2(t-2)^2+2t(t-2)^2+2=\frac{4}{3}(t-2)^3+2(t-2)^2+2$$

$$f'(t)=4(t-2)^2+4(t-2)=4(t-2)(t-1)$$

よって $t=2$ で最小値 2

以上より　$f(t)$ は $\boldsymbol{t=2}$ で最小値 **2** をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　記号 ＋ と － を重複を許し1列に並べてできる列のうち，同じ記号は3つ以上連続して並ばないものを考える．＋ と － という記号を全部で n 個 $(n \geqq 2)$ 使ってつくられるこのような列のうち，最後が ＋＋ または －－ で終わる列の個数を a_n とおき，最後が ＋－ または －＋ で終わる列の個数を b_n とおく．

(1)　a_{n+1} と b_{n+1} を a_n と b_n で表せ．

(2)　$\{a_n+rb_n\}$ が公比 r の等比数列となるような r の値をすべて求めよ．

(3)　長さが n のこのような列の個数 a_n+b_n を，(2)で求めた r の値を使って表せ．

(1)　同じ記号が3つ以上並ばないことから，

a_{n+1} として数えられる列は最後が －＋＋ または ＋－－ である．

これらから最後の記号を除いたものは，b_n として数えられるものでそのすべてである．

ゆえに　$\boldsymbol{a_{n+1}=b_n}$

b_{n+1} として数えられる列は最後が ＋＋－，－＋－，＋－＋，－－＋ のいずれかである．

これらから最後の記号を除いたものは a_n または b_n として数えられるもので，合わせてそのすべてである．

ゆえに　$\boldsymbol{b_{n+1}=a_n+b_n}$

(2)　$a_{n+1}+rb_{n+1}=b_n+r(a_n+b_n)=ra_n+(r+1)b_n$

また，$\{a_n+rb_n\}$ が公比 r の等比数列となるとき　$a_{n+1}+rb_{n+1}=r(a_n+rb_n)=ra_n+r^2b_n$

$b_n \neq 0$ より　$r^2=r+1$　　ゆえに　$\boldsymbol{r=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

(3)　(2)より　$a_n+rb_n=(a_2+rb_2)\cdot r^{n-2}=2(1+r)\cdot r^{n-2}=2r^n$

(2)の r を代入して

$$a_n+\frac{1+\sqrt{5}}{2}b_n=2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots① \qquad a_n+\frac{1-\sqrt{5}}{2}b_n=2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots②$$

(①－②)÷$\sqrt{5}$ より　$b_n=\frac{2}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

よって　$a_n+b_n=b_{n+1}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}}$

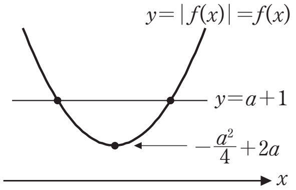
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a を実数とする．x についての方程式 $|x^2+ax+2a|=a+1$ が異なる実数解をちょうど2個もつような a の値の範囲を求めよ．

解答例



$$f(x)=x^2+ax+2a=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+2a$$

（i）　$-\frac{a^2}{4}+2a\geqq 0$ のとき

$a(a-8)\leqq 0$　つまり　$0\leqq a\leqq 8$　のとき

$y=f(x)$ のグラフはすべて x 軸より上側にある．

よって　$|f(x)|=f(x)$ より

$f(x)=a+1$ が異なる実数解を2個もつときを考えればよい．

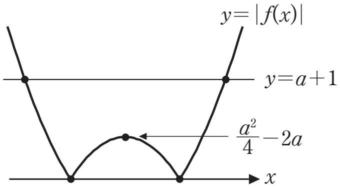
それは **グラフより $-\frac{a^2}{4}+2a<a+1$ のとき** であり，

「解の個数」は「グラフ」で扱う．
とくに注意すべきは
「つなぎ目」と「極値」である．

$a^2-4a+4>0$　　$(a-2)^2>0$　より　$a\neq 2$ のときである．

よって　$0\leqq a<2,\ 2<a\leqq 8$

（ii）　$-\frac{a^2}{4}+2a<0$ のとき



つまり　$a<0,\ 8<a$　のとき

$y=f(x)$ のグラフは右図．

よって　$|f(x)|=a+1$ が異なる実数解を2個もつのは

グラフより　$a+1=0$　または　$\frac{a^2}{4}-2a<a+1$のとき である．

$a=-1,\ a^2-12a-4<0$

つまり　$a=-1,\ 6-2\sqrt{10}<a<6+2\sqrt{10}$

よって　$a=-1,\ 6-2\sqrt{10}<a<0,\ 8<a<6+2\sqrt{10}$

（i），（ii）より求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a=-1,\ 6-2\sqrt{10}<a<2,\ 2<a<6+2\sqrt{10}}$$

※ 〔枠〕 は授業で触れたポイント．定着しているか確認しよう！

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面の 3 点 A(0, 0)，B(2, 0)，C$(1, \sqrt{3})$ を頂点とする△ABC に対して以下の問いに答えよ．

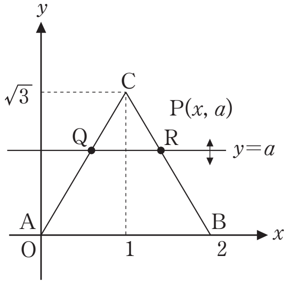
(1)　$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ を満たす定数 a に対して，点 P(x, a) が△ABC の周または内部に含まれるための x の範囲を求めよ．

(2)　(1)の定数 a に対して，(1)で求められた範囲を x が動くとき，$AP^2+BP^2+CP^2$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(3)　点 P(x, y) が△ABC の周または内部に含まれるとき，$AP^2+BP^2+CP^2$ の最小値と，そのときの点 P の座標 (x, y) を求めよ．

解答例

△ABC は右図となり，1 辺の長さが 2 の正三角形である．



(1)　$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき，直線 $y=a$ と辺 CA，CB との交点をそれぞれ Q，R とすると，x が Q，R の x 座標間に含まれればよい．

CA : $y=\sqrt{3}\,x$　より，Q の x 座標は　$\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

CB : $y=\sqrt{3}\,(x-2)$　より，R の x 座標は　$2-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

ゆえに，求める範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{a}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq 2-\dfrac{a}{\sqrt{3}}}$

(2)　$AP^2+BP^2+CP^2$

$=(x^2+a^2)+\{(x-2)^2+a^2\}+\{(x-1)^2+(a-\sqrt{3})^2\}$

$=3x^2-6x+3a^2-2\sqrt{3}\,a+8$

$=3(x-1)^2+3a^2-2\sqrt{3}\,a+5$

$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき　$\dfrac{a}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq 2-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

グラフより明らかに $x=1$ はこの範囲に含まれる．

よって　$\boldsymbol{x=1}$ のとき　$AP^2+BP^2+CP^2$ は最小値　$\boldsymbol{3a^2-2\sqrt{3}\,a+5}$　をとる．

(3)　$AP^2+BP^2+CP^2$ の最小値 $3a^2-2\sqrt{3}\,a+5$ を $f(a)$ とおくと，

$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ の範囲で a を動かしたとき

$f(a)=3\left(a-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+4$ は　$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最小値 4 をとる．

このとき　$\boldsymbol{P\left(1,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ ←

これは三角形 ABC の「重心」である．予測をたて，結果と照らし合わせて検証することでさらに数学の力は伸びるであろう．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

東北大数学ＩＡⅡＢ　　第２講　高次方程式，証明　練習問題 解答

1　$x \geqq 0$，$y>0$，$z \geqq 0$，$a>b>c$ で $(x+y+z)^2=ax+by+cz$ とする．$S=x+y+z$ とおくとき，S，a，c を大きい順に並べよ．

解答例

$(x+y+z)^2=ax+by+cz$ より　$S^2=ax+by+cz$

$a>c$，$x \geqq 0$ より　$ax \geqq cx$

$b>c$，$y>0$ より　$by>cy$

← 大小関係を用いて「下げる」ための準備

よって　$ax+by+cz>cx+cy+cz=c(x+y+z)=cS$

← 実際に「下げた」

$b<a$，$y>0$ より　$by<ay$

$c<a$，$z \geqq 0$ より　$cz \leqq az$

よって　$ax+by+cz<ax+ay+az=a(x+y+z)=aS$

← 「上げた」

したがって　$aS>ax+by+cz>cS$　　すなわち　$aS>S^2>cS$

ゆえに　$a>S>c$ より　大きい順に $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{c}$

問題の条件から $(x+y+z)^2$ つまり「S^2」を他のものと比較することがわかる．$S<a \Leftrightarrow S^2<aS$ であるから，「S^2」と aS との大小比較であることも予測がつく．
あとは，どのように $ax+by+cz$ を aS すなわち $a(x+y+z)=ax+ay+az$ に「下げる」または「上げる」かを，問題の大小条件に照らし合わせて考えればよい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 t を 0 でない実数とし，2 次方程式 $x^2-tx+5t=0$ を考える．

(1) $x^2-tx+5t=0$ の解 α, β が $\alpha^5+\beta^5=t^5$ を満たすとする．このときの t の値を求めよ．

(2) $x^2-tx+5t=0$ が虚数解をもち，その 5 乗が実数になるとする．このときの t の値を求めよ．

解答例

(1) $x^2-tx+5t=0$ の 2 解が α，β であることより，

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=t$，$\alpha\beta=5t$

このとき

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=t^2-10t$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=t^3-15t^2$$

よって　$\alpha^5+\beta^5=(\alpha^3+\beta^3)(\alpha^2+\beta^2)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

$=(t^3-15t^2)(t^2-10t)-(5t)^2\cdot t$

$=t^5-25t^4+125t^3$

$\alpha^5+\beta^5=t^5$ より　$-25t^4+125t^3=0$

$t\neq 0$ より　$\boldsymbol{t=5}$

(2) $x^2-tx+5t=0$ が虚数解をもつとき，$t^2-20t<0$　よって　$0<t<20$

このとき，$x^2-tx+5t=0$ の虚数解の 1 つを α とすると

$\alpha^2-t\alpha+5t=0$　　よって　$\alpha^2=t\alpha-5t$

$\alpha^4=(t\alpha-5t)^2=t^2\alpha^2-10t^2\alpha+25t^2=t^2(t\alpha-5t)-10t^2\alpha+25t^2$

$=(t^3-10t^2)\alpha-5t^3+25t^2$

「下げた」

$\alpha^5=(t^3-10t^2)\alpha^2+(-5t^3+25t^2)\alpha$

$=(t^3-10t^2)(t\alpha-5t)+(-5t^3+25t^2)\alpha$

$=(t^4-15t^3+25t^2)\alpha-5t^4+50t^3$

t は実数であることより，これが実数になるのは $t^4-15t^3+25t^2=0$ のとき

$t\neq 0$ より　$t^2-15t+25=0$　　ゆえに　$\boldsymbol{t=\dfrac{15\pm 5\sqrt{5}}{2}}$　（$0<t<20$ を満たす）

今回は「5 乗」の値を扱うということで，「式で割る」，すなわち「筆算」による次数下げは選択していないが，「方程式の解」であることを利用して次数を下げたことにかわりはない．筆算による方法も含め常に選択肢に入れておくように．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　A, B の 2 人がそれぞれ 1 から 10 までの自然数の中から異なる 5 つの数を選ぶとき，2 人の選んだ数が 3 つ以上一致している確率を求めよ．

解答例

2 人の数の選び方は

$${}_{10}C_5\times{}_{10}C_5=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=2^4\cdot3^4\cdot7^2\ (\text{通り})$$

この内，2 人の選んだ数が 3 つ以上一致するのは以下．

(i) ちょうど 3 つ一致するとき ← 起こりうる場合を「背反事象」に分ける

一致する 3 つの数の選び方が ${}_{10}C_3$ 通り

残り 7 つの数の中から A が選ぶ残り 2 つの数の選び方が ${}_7C_2$ 通り，さらに残った 5 つの数の中から B が選ぶ残り 2 つの数の選び方が ${}_5C_2$ 通り．

よって，このときの場合の数は

$${}_{10}C_3\times{}_7C_2\times{}_5C_2=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{7\cdot6}{2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=2^4\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\ (\text{通り})$$

(ii) ちょうど 4 つ一致するとき

一致する 4 つの数の選び方が ${}_{10}C_4$ 通り

残り 6 つの数の中から A が選ぶ残り 1 つの数，およびさらに残った 5 つの数の中かから B が選ぶ残り 1 つの数の選び方が ${}_6C_1\times{}_5C_1$（通り）．

よって，このときの場合の数は

$${}_{10}C_4\times{}_6C_1\times{}_5C_1=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times6\times5=2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\ (\text{通り})$$

(iii) 5 つとも一致するとき

一致した 5 つの数の選び方がこのときの場合の数である．それは

$${}_{10}C_5=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=2^2\cdot3^2\cdot7\ (\text{通り})$$

以上より求める確率は

$$\frac{2^4\cdot3^2\cdot5^2\cdot7+2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7+2^2\cdot3^2\cdot7}{2^4\cdot3^4\cdot7^2}=\frac{2^2\cdot5^2+5^2+1}{2^2\cdot3^2\cdot7}=\frac{126}{2^2\cdot3^2\cdot7}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　１から６の番号のつけられた６個の箱に，それぞれ３枚ずつの皿が重ねて置かれている．白いサイコロと黒いサイコロそれぞれ１個を同時に振って，出た目に応じて次の規則で皿を移動させるものとする．２つのサイコロに同じ目が出たときは皿は移動させない．２つのサイコロに異なる目が出たときは，黒いサイコロの目の数と同じ番号の箱から皿１枚を白いサイコロの目の数と同じ番号の箱に移す．

(1)　サイコロを３回振るとき，皿が４枚の箱と２枚の箱がそれぞれ３個ずつとなる確率を求めよ．

(2)　サイコロを３回振るとき，皿が３枚の箱が２個，５枚の箱，４枚の箱，２枚の箱，１枚の箱がそれぞれ１個ずつとなる確率を求めよ．

解答例

(1)　題意を満たすのは，白と黒のサイコロの出目３回分で１～６が１つずつ出た場合である．このうち，黒のサイコロ３回分の出目の選び方が ${}_6C_3=20$（通り），それがどの回で出たかの決め方が　3! 通り，さらに残りの出目３つが白のサイコロのどの回で出たかの決め方が　3! 通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{5\cdot4\cdot6\cdot6}{6^6}=\boldsymbol{\dfrac{5}{324}}$

(2)　皿は１回の試行につき１枚のみの移動となる．

３回の試行で５枚，４枚の入った箱が存在しているので，どの回も必ず皿の移入がこれらの２つの箱に起こり，移出はない．また，３回の試行で２枚，１枚入りの箱が存在しているので，どの回も必ず皿の移出がこれらの２つの箱に起こり、移入はない．

結果，３枚の箱２つはこの３回の試行で移出も移入も起こらなかった箱である．

皿が５枚，４枚，２枚，１枚になる箱の決め方が　${}_6C_4\times4!=6\cdot5\cdot4\cdot3$（通り）．

その箱をそれぞれ B_5，B_4，B_2，B_1 とし，簡単のためにその箱の番号を順に５，４，２，１とすると，B_5 に起こる２枚の移入が　(i)　B_1 から２枚　　(ii)　B_1，B_2 から１枚ずつ　起こる場合があり，B_4 に起こる１枚の移入は，(i)のときは B_2 から，(ii)のときは B_1 から起こる．

(i)の場合，３回分の出目は（黒，白）$=(1, 5)$，$(1, 5)$，$(2, 4)$ で，

　これが３回のどこで出たかの決め方が　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）．

(ii)の場合，３回分の出目は（黒，白）$=(1, 5)$，$(1, 4)$，$(2, 5)$ で，

　これが３回のどこで出たかの決め方が　$3!=6$（通り）．

　B_5，B_4，B_2，B_1 である箱が実際にはどの番号であった場合も結果は同じである．

　ゆえに，求める確率は　$\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot(3+6)}{6^6}=\boldsymbol{\dfrac{5}{72}}$

ややもすれば「計算式だけ」になりがちである．この解答を「見てもらう」という気持ちをもって時間とスペースの許す限り「論述」していくこと．書き方は自由であるが，適時「記号」や「図」を補助的に利用し読みやすくする工夫も必要であろう．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

東北大数学ⅠAⅡB　第４講　図形と方程式　練習問題　解答

1　実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2}, t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる２本の接線を引き，２つの接点を通る直線を l とする．

(1)　直線 l の方程式を t を用いて表せ．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず l が通る点がある．この点の座標を求めよ．

解答例

明らかに「円外の点」であることがわかる．

(1)　点 $\left(\frac{1}{2}, t\right)$ $(t>1)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた２本の接線と円との接点を (x_1, y_1)，(x_2, y_2) とすると，２本の接線は

$x_1x+y_1y=1$，$x_2x+y_2y=1$　と表せる．

これらがともに点 $\left(\frac{1}{2}, t\right)$ を通るので

$x_1\cdot\frac{1}{2}+y_1\cdot t=1$，$x_2\cdot\frac{1}{2}+y_2\cdot t=1$

$\frac{1}{2}x_1+ty_1=1$，$\frac{1}{2}x_2+ty_2=1$

「極線」をモチーフとするこの問題を通じ，この考え方を定着させよう．

この２式は，直線 $\frac{1}{2}x+ty=1$　が点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) を通ることを示している．

よって，直線 l の方程式は　$\boldsymbol{\frac{1}{2}x+ty=1}$　$(x+2ty-2=0)$

(2)　$x+2ty-2=0$　つまり　$(x-2)+2yt=0$

これが任意の実数 $t(t>1)$ で成り立つための条件は　$x-2=0$　かつ　$2y=0$

つまり　$x=2$　かつ　$y=0$

よって，t によらず l は 定点 $\boldsymbol{(2, 0)}$ を通る．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 **応用** 実数 a, b に対して，$f(x)=(a+8b)x^2-8bx+b$ とする．「$0\leqq x\leqq 1$　ならば $f(x)>0$」が成り立つ点 (a, b) の範囲を求め，ab 平面上に図示せよ．

解答例

(i) $a+8b=0$　つまり　$b=-\dfrac{1}{8}a$ のとき

$f(x)=-8bx+b$

$b=0$ のとき　$f(x)=0$ となり $f(x)>0$ を満たさない．

$b<0$ のとき　$f(x)$ は右上がりの直線．

よって　$f(0)>0$　であればよい．

ところが　$f(0)=b<0$　より不適．

※ $f(x)=b(-8x+1)$ より $f\left(\dfrac{1}{8}\right)=0$ となり $f(x)>0$ を満たさず不適となる．これに気づけば b による場合分けをせずとも済む．

$b>0$ のとき　$f(x)$ は右下がりの直線．よって　$f(1)>0$　であればよい．

ところが　$f(1)=-7b<0$　より不適．

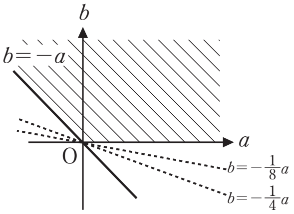
(ii) $a+8b\neq 0$ のとき

$$f(x)=(a+8b)x^2-8bx+b=(a+8b)\left(x-\frac{4b}{a+8b}\right)^2-\frac{16b^2}{a+8b}+b$$

$f(x)$ のグラフの軸は $x=\dfrac{4b}{a+8b}$　　頂点の y 座標は $\dfrac{b(a-8b)}{a+8b}$

また，$f(0)=b>0$　かつ　$f(1)=a+b>0$　……① であることが必要．

図示すると，右図斜線部分（境界含まず）．



このとき　$a+8b<0$　つまり　$b<-\dfrac{1}{8}a$ は成り立たず不適．

よって　$a+8b>0$　（これは①の条件のもとで必ず成り立つ）

つまり，$y=f(x)$ が下に凸のときを考える．

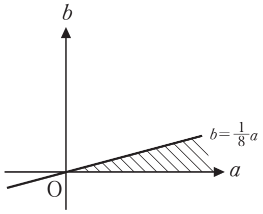
$0<\dfrac{4b}{a+8b}<1$　つまり　$b>0$　かつ　$b>-\dfrac{1}{4}a$　は①のもとで必ず成り立つので，

$f(x)$ の軸は $0<x<1$ にある．

よって，求める条件は　$\dfrac{b(a-8b)}{a+8b}>0$　$a-8b>0$　つまり　$b<\dfrac{1}{8}a$　である．

以上より，求める (a, b) の範囲は　$\boldsymbol{0<b<\dfrac{1}{8}a}$　である．

図示すると，右図斜線部分（境界含まず）．



※本来なら，下に凸の放物線の最小値は「軸を変域に含むときと含まないとき」で場合分けするのが基本であるが，文字条件を複雑に含む場合は，「端点の条件」を「必要条件」すなわち「必ず成り立たなければならない条件」として先に求めると「絞り込み」となって効果的である．それにより今回は「下に凸」かつ「軸は変域内」であるとわかる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

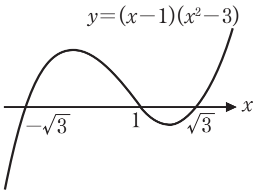
1　２つの曲線 $y=x^2$ と $y=x^3-3x+3$ で囲まれる領域を D とする．次の問いに答えよ．

(1)　D を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ が D 上を動くとき，$3x+4y$ の最大値と，最大値を与える点 $(x,\ y)$ を求めよ．

解答例

(1)　$f(x)=x^2$，$g(x)=x^3-3x+3$　とおく．



$g(x)\geqq f(x)$ となる x を求めると

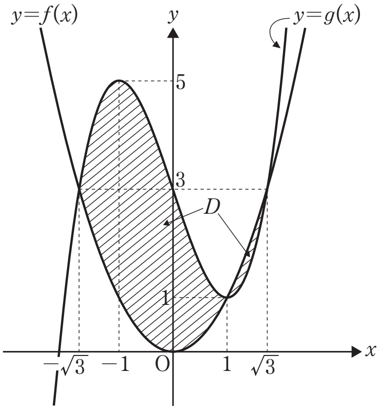
$x^3-x^2-3x+3\geqq 0$　　$(x-1)(x^2-3)\geqq 0$

よって　$-\sqrt{3}\leqq x\leqq 1$，$\sqrt{3}\leqq x$

また　$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$　より

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの概形は右図であり，

領域 D はその斜線部分である（境界含む）．



上下関係をはっきりさせて図示するためには，「交点の座標」だけがわかればいいのではない．よって，上下関係を「不等式」で表した．これは授業で触れた通り，微分した式が０になる点が大切ではなく，その正負をグラフで把握することが大切であることと共通．

(2)　$3x+4y=k$ とおき，$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{k}{4}$ $\left(傾き-\dfrac{3}{4}の直線\right)$ が領域 D と共有点をもつ条件のもとで，y 切片 $\dfrac{k}{4}$ が最大となるときを考える．

それは，(1)のグラフより以下のいずれかの場合である．

(i)　直線が点 $(\sqrt{3},\ 3)$ を通るとき

$k=3\sqrt{3}+12$

(ii)　直線が $y=g(x)$ のグラフと接するとき

$g'(x)=-\dfrac{3}{4}$　となるのは　$3x^2-3=-\dfrac{3}{4}$　より　$x^2=\dfrac{3}{4}$

(1)のグラフより　$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき．これが接点の x 座標．

このとき　$y=g\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{9\sqrt{3}}{8}+3$ より　$k=3\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+4\cdot\left(\dfrac{9\sqrt{3}}{8}+3\right)=3\sqrt{3}+12$

以上より，$3x+4y$ の最大値は　$\mathbf{3\sqrt{3}+12}$　これを与える $(x,\ y)$ は

$(\sqrt{3},\ 3)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{24+9\sqrt{3}}{8}\right)$

※最大となる状態は２択であり，どちらになるかはグラフからは判断できない．領域を利用した最大・最小ではこのように微妙な状態の判断を迫られるときがある．自明でない場合は必ずこのように両方の値を出して比較したという「跡」を残すことが必要である．今回は「どちらも最大」．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 $C: y=x^2-4x+3$ と直線 $l: y=mx-m$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 放物線 C と直線 l が接するときの m の値 m_0 を求めよ．

(2) $m>m_0$ とする．放物線 C と直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし，放物線 C と直線 l で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 をそれぞれ m を用いて表せ．

(3) $m>m_0$ における S_2-2S_1 の最小値，およびそのときの m の値を求めよ．

解答例

(1) C と l の共有点の x 座標は

$x^2-4x+3=mx-m$ つまり $x^2-(m+4)x+m+3=0$

$(x-m-3)(x-1)=0$ より $x=m+3, 1$

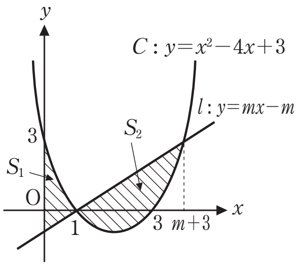
よって，この2つのグラフが接するのは $m+3=1$

つまり $m=-2$ のとき　ゆえに $\boldsymbol{m_0=-2}$

※通常ならば「判別式＝0」であるが，今回は y を消去して作成した x の方程式が「因数分解」できたので，交点の x 座標がわかってしまった．
さらに，(2)の S_2 においても，交点の x 座標を α，β とおくことなく面積を出すことができた．

(2) $m>-2$ のとき　$C: y=(x-1)(x-3)$，$l: y=m(x-1)$ のグラフは下図．

$$S_1=\int_0^1\{x^2-4x+3-(mx-m)\}dx=\int_0^1\{x^2-(m+4)x+m+3\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{m+4}{2}x^2+(m+3)x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{m+4}{2}+m+3=\boldsymbol{\frac{1}{2}m+\frac{4}{3}}$$

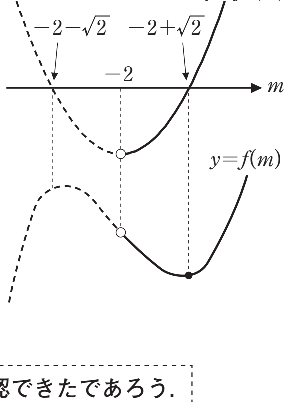


$$S_2=\int_1^{m+3}\{-x^2+(m+4)x-m-3\}dx$$
$$=-\int_1^{m+3}\{x-(m+3)\}(x-1)dx$$
$$=-\left\{-\frac{1}{6}(m+3-1)^3\right\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}(m+2)^3}$$

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(3) $S_2-2S_1=\frac{1}{6}(m+2)^3-m-\frac{8}{3}=f(m)$　とおくと

$$f'(m)=\frac{1}{2}(m+2)^2-1=\frac{1}{2}\{(m+2)^2-2\}$$
$$=\frac{1}{2}(m+2+\sqrt{2})(m+2-\sqrt{2})$$



よって，$m>-2$ における最小値は　$\boldsymbol{m=-2+\sqrt{2}}$ のとき

$$f(-2+\sqrt{2})=\frac{1}{6}(\sqrt{2})^3-(-2+\sqrt{2})-\frac{8}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+6-3\sqrt{2}-8}{3}=\boldsymbol{\frac{-2-2\sqrt{2}}{3}}$$

※(2)で1/6公式を使うことにより，(3)が非常に楽になることが確認できたであろう．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　不等式 $\log_2 \dfrac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 1$ ……①　を満たす点 (x, y) が存在する範囲を図示せよ.

解答例

(真数)>0　より　$\dfrac{2-x^2-y^2}{x+y}>0$　⟶　$(2-x^2-y^2)(x+y)>0$

よって　$\begin{cases} x+y>0 \\ 2-x^2-y^2>0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x+y<0 \\ 2-x^2-y^2<0 \end{cases}$

つまり　$\begin{cases} y>-x \\ x^2+y^2<2 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y<-x \\ x^2+y^2>2 \end{cases}$　……②

①より　$\dfrac{2-x^2-y^2}{x+y} \leqq 2$　　$(x+y)(2-x^2-y^2) \leqq 2(x+y)^2$

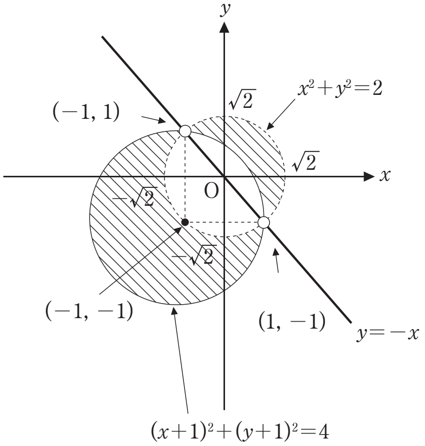
$(x+y)\{2-x^2-y^2-2(x+y)\} \leqq 0$

$(x+y)\{(x+1)^2+(y+1)^2-4\} \geqq 0$

よって　$\begin{cases} x+y \geqq 0 \\ (x+1)^2+(y+1)^2-4 \geqq 0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x+y \leqq 0 \\ (x+1)^2+(y+1)^2-4 \leqq 0 \end{cases}$

つまり　$\begin{cases} y \geqq -x \\ (x+1)^2+(y+1)^2 \geqq 4 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y \leqq -x \\ (x+1)^2+(y+1)^2 \leqq 4 \end{cases}$　……③

②かつ③より，条件を満たす点が存在する範囲は下図斜線部分.
境界線は実線部分のみ含む.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 応用 座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ が不等式 $x^2+y^2\leqq 4$ によって表される領域内を動くとき2次式 $7x^2+4xy+4y^2$ のとる値の最大値を求めよ.

解答例

点Pは $x^2+y^2\leqq 4$ を満たす点であることより

$\mathrm{P}(r\cos\theta,\,r\sin\theta)\ (0\leqq r\leqq 2)$ とおくことができる.

円周上の点の三角関数による表現である．今回は「円の内部」も表す必要があるため，半径に範囲をもたせることによって実現した.

$$
\begin{aligned}
&7x^2+4xy+4y^2\\
&=7r^2\cos^2\theta+4r\cos\theta\cdot r\sin\theta+4r^2\sin^2\theta\\
&=7r^2\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+4r^2\cdot\frac{\sin2\theta}{2}+4r^2\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}\\
&=2r^2\sin2\theta+\frac{3}{2}r^2\cos2\theta+\frac{11}{2}r^2\\
&=\frac{5}{2}r^2\sin(2\theta+\alpha)+\frac{11}{2}r^2
\end{aligned}
$$

ただし，α は　$\cos\alpha=\dfrac{4}{5},\ \sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ を満たす鋭角.

よって，$7x^2+4xy+4y^2$ は

$r=2,\ \sin(2\theta+\alpha)=1$ のとき　最大値　$\dfrac{5}{2}\cdot2^2\cdot1+\dfrac{11}{2}\cdot2^2=\mathbf{32}$　をとる.

※ $7x^2+4xy+4y^2=k$ とおいた人も少なくないであろう．しかし「xy」が邪魔をして「図形」が描けなかったはずだ．円周上の点をパラメータ θ で表す（媒介変数表示）ことにより，x と y を別々に扱うことができることがこの解法の目玉である.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

東北大数学ⅠAⅡB　第7講　ベクトル　練習問題　解答

1 平面上の3点O，A，Bが$OA=5$，$OB=3$，$\angle AOB=\theta$ $(0<\theta<\pi)$を満たしている．$\angle AOB$の二等分線上の点Cを$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AC}$となるようにとる．

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおくとき，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ (p，qは実数）と表すことができる．p，qをθを用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OA}\parallel\overrightarrow{BC}$のとき，$\cos\theta$を求めよ．

(3) (2)のとき，四角形OACBの面積を求めよ．

解答例

(1) 直線OCと線分ABの交点をPとすると，角の二等分線の性質より

$AP:BP=OA:OB=5:3$　よって　$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{8}\overrightarrow{OB}$　と表され

$\vec{c}=k'\left(\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{8}\overrightarrow{OB}\right)=k(3\vec{a}+5\vec{b})$　(k，k'は実数）　とおくことができる．

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AC}$　より　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{a}\cdot(3k\vec{a}+5k\vec{b}-\vec{a})=3k|\vec{a}|^2+5k\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2=0$$

$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=5\times3\times\cos\theta$　より

$$3k\times5^2+5k\times5\times3\times\cos\theta-5^2=0\qquad 3(1+\cos\theta)k=1$$

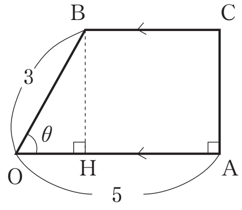
$0<\theta<\pi$ より　$1+\cos\theta\neq0$　よって　$k=\frac{1}{3(1+\cos\theta)}$

したがって　$\vec{c}=\frac{1}{1+\cos\theta}\vec{a}+\frac{5}{3(1+\cos\theta)}\vec{b}$　と表される．

これを，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$と比較して　$\boldsymbol{p=\frac{1}{1+\cos\theta}}$，$\boldsymbol{q=\frac{5}{3(1+\cos\theta)}}$

(2) $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}=p\vec{a}+(q-1)\vec{b}$　$\vec{a}\parallel\overrightarrow{BC}$より $q-1=0$

つまり　$\frac{5}{3(1+\cos\theta)}=1$　ゆえに　$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{2}{3}}$



(3) $0<\theta<\pi$ より　$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

BからOAに下ろした垂線の足をHとすると

$BH=OB\sin\theta=3\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$　　$BC=OA-OH=5-OB\cos\theta=5-3\times\frac{2}{3}=3$

ゆえに，求める台形の面積は　$\frac{1}{2}(BC+OA)\times AC=\frac{1}{2}(3+5)\times\sqrt{5}=\boldsymbol{4\sqrt{5}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　点 $(-1,\ -1,\ 2)$ を通り，方向ベクトルが $(2,\ 1,\ 2)$ である直線を g とする．また点 $\mathrm{A}(-3,\ 0,\ 2)$ と g を含む平面を α とする．次の各問いに答えよ．

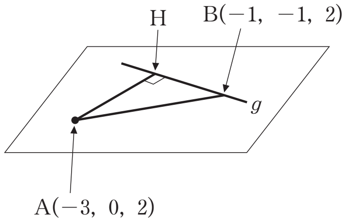
(1)　点 A から g に下ろした垂線と g との交点を H とする．点 H の座標を求めよ．

(2)　点 A と g との距離を求めよ．

(3)　点 $(-2m-7,\ 2m+3,\ -3m+4)$ が α 上にあるとき，m の値を求めよ．

解答例

$\mathrm{B}(-1,\ -1,\ 2)$，$\vec{d}=(2,\ 1,\ 2)$とする．



(1)　直線 g 上の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\vec{d}=(-1,\ -1,\ 2)+k(2,\ 1,\ 2)$$
$$=(2k-1,\ k-1,\ 2k+2)$$

と表すことができる．　**直線のベクトルによる表現**

よって　$\mathrm{H}(2k-1,\ k-1,\ 2k+2)$ とおく．

また，$\mathrm{AH}\perp g$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot(2,\ 1,\ 2)=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(2k+2,\ k-1,\ 2k)$ より　$2\times(2k+2)+1\times(k-1)+2\times 2k=0$　　$k=-\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\mathbf{H}\left(-\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

(2)　点 A と g との距離は AH の長さである．

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}(2,\ -2,\ -1)$$

ゆえに，求める距離は　$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\dfrac{2}{3}\sqrt{4+4+1}=\dfrac{2}{3}\times 3=\mathbf{2}$

(3)　平面 α 上の点 Q について

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right)=(-3,\ 0,\ 2)+s(2,\ -1,\ 0)+t(2,\ -2,\ -1)$$
$$=(2s+2t-3,\ -s-2t,\ -t+2)$$

と表すことができる．

よって，点 $(-2m-7,\ 2m+3,\ -3m+4)$ が α 上にあるとき

$$\begin{cases}-2m-7=2s+2t-3 & \cdots\cdots① \\ 2m+3=-s-2t & \cdots\cdots② \\ -3m+4=-t+2 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①，②より　$t=-m-1$　　③より　$t=3m-2$

よって　$-m-1=3m-2$　より　$\boldsymbol{m=\dfrac{1}{4}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と行くことで平面 α 上に移動することができる．よって平面上の２ベクトルの１次結合の形により平面上の任意の点が表現できる．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ をそのまま用いると「分数」となるため，これを伸縮させた $(2,\ -2,\ -1)$ を用いた．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[1] $a_1=-15,\ a_{n+1}=a_n+3n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1) 一般項 a_n を求めよ.

(2) 初項 a_1 から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

(3) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ と変化したとき, S_n が最小となる n の値と, そのときの S_n の値を求めよ.

解答例

(1) $a_{n+1}=a_n+3n$ より, 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると, $b_n=3n$ である.

よって, $n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=-15+\sum_{k=1}^{n-1}3k=-15+3\cdot\frac{(n-1)n}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-15$$

これは $n=1$ のときも成り立つ.

ゆえに　$\boldsymbol{a_n=\frac{3}{2}(n^2-n-10)}$

(2) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k-10)=\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)-10n\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-3(n+1)-60\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n^2-31)}$$

(3) $a_n<0$ となるのは　$n^2-n-10<0$　つまり　$n(n-1)<10$ より　$n=1, 2, 3$

よって　$1\leqq n\leqq 3$ のとき　$a_n<0$　　$4\leqq n$ のとき　$a_n>0$

したがって, S_n が最小となる n は　$\boldsymbol{n=3}$

そのときの S_n の値は　$S_3=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(9-31)=\boldsymbol{-33}$

S_n は a_n を順に加えたもの. 正の項を加えれば増加し, 負の項を加えれば減少する.
n にすべての実数を許すと S_n は n の３次関数でありそのグラフの形状は増加 → 減少 → 増加となる.
したがって, 最小値は「極小値にもっとも近い点」であると予想できる。それは減少が止まる, すなわち a_n が負である最終項にほかならない.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) $x \geqq 4$ を満たすすべての実数 x に対して，$x^3 > 3x^2 + 3x + 1$ が成り立つことを示せ.
(2) $m \geqq 10$ を満たすすべての自然数 m に対して，$2^m > m^3$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ.

解答例

今回は
$f'(x)$ を 0 にする x すなわち $x = 1 \pm \sqrt{2}$ が $x \geqq 4$ に含まれていないため左には記していない.
実際にはこのことを調べているので解答には現れていないが注意.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ とおくと

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x-1)^2 - 6$　より

$x \geqq 4$ において，常に $f'(x) > 0$　つまり　$f(x)$ は単調増加.

また，$f(4) = 3 > 0$

よって　$x \geqq 4$ のすべての x で　$f(x) > 0$

ゆえに　この範囲で常に　$x^3 > 3x^2 + 3x + 1$　が成り立つ.

(2) $2^m > m^3$　……(※)　について

［Ⅰ］ $m = 10$ のとき

(※)の左辺 $= 2^{10} = 1024$　　(※)の右辺 $= 10^3 = 1000$　　より(＊)は成り立つ.

［Ⅱ］ $m = k(\geqq 10)$ のとき（※）すなわち，$2^k > k^3$ が成り立つと仮定する.

このとき　$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^3$

ここで　$2k^3 - (k+1)^3 = k^3 - 3k^2 - 3k - 1 > 0$ （(1)の結果より） であるので

$2^{k+1} > (k+1)^3$

確実に利用できるように

よって　$n = k+1$ のときも（＊）が成り立つ.

［Ⅰ］［Ⅱ］より　$m \geqq 10$ を満たすすべての自然数 m で（＊）が成り立つ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=2|x(x^2-1)|$ のグラフの概形をかけ．

(2) k を実数とするとき，方程式 $2|x(x^2-1)|=k-|x|$ の解の個数を k の値に応じて求めよ．

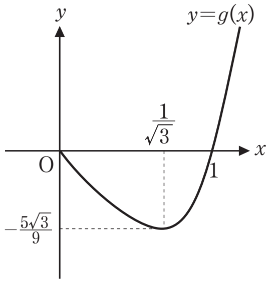
解答例

(1) $g(x)=2x(x^2-1)=2x^3-2x$ は奇関数より，グラフは原点対称．

よって，まずは $x\geqq 0$ の部分で考える．

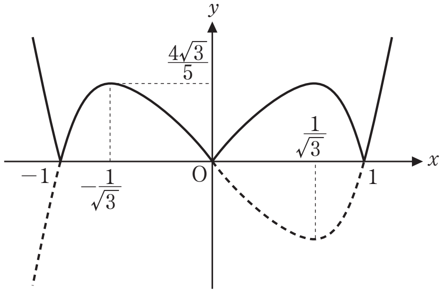
$g'(x)=6x^2-2$　　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で　$g'(x)=0$

よって　$y=g(x)$ の $x\geqq 0$ におけるグラフは右図．



このグラフを原点に関して対称移動し，さらにその全体のグラフにおいて x 軸より下の部分を上に折り返したものが $y=f(x)$ のグラフである．

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図．



(2) $y=-|x|+k$ のグラフ（上に凸の折れ線）と $y=f(x)$ のグラフの共有点の個数を求める．

この２つのグラフはともに y 軸対称より

$x>0$ の部分のみ考える．

$y=-x+k$　と　$y=-g(x)$　が接するのは

$-g'(x)=-1$　より　$-6x^2+2=-1$　よって　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときで　$-g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

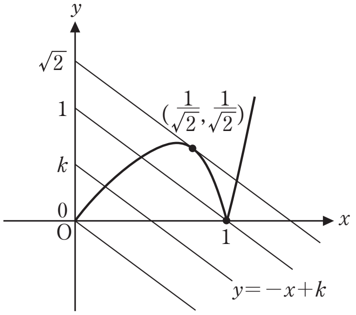
$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を $y=-x+k$ が通るのは　$k=\sqrt{2}$ のとき

また，$(1,0)$ を $y=-x+k$ が通るのは　$k=1$ のとき

この結果を $x<0$ の部分に反映し，

さらに，$x=0$ 上に交点があるときの $k=0$ も考慮すると，

求める解の個数は



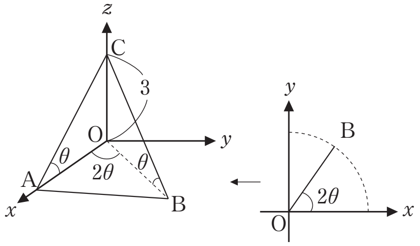
$$
\begin{cases}
k<0 \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\
k=0 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\
0<k<1 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\
k=1 \text{ のとき } 4 \text{ 個} \\
1<k<\sqrt{2} \text{ のとき } 6 \text{ 個} \\
k=\sqrt{2} \text{ のとき } 4 \text{ 個} \\
k>\sqrt{2} \text{ のとき } 2 \text{ 個}
\end{cases}
$$

対称性をうまく利用し，答案を仕上げてゆくとよい．
ちなみに
偶関数……$f(x)=f(-x)$　y 軸対称
奇関数……$f(x)=-\{f(-x)\}$　原点対称
である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　原点を O とする xyz 空間内で，x 軸上の点 A，xy 平面上の点 B，z 軸上の点 C を，次を満たすように定める．$\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{OBC}=\theta$，$\angle\mathrm{AOB}=2\theta$，$\mathrm{OC}=3$
ただし，A の x 座標，B の y 座標，C の z 座標はいずれも正であるとする．さらに，$\triangle$ABC 内の点のうち，O からの距離が最小の点を H とする．また，$t=\tan\theta$ とおく．
(1)　線分 OH の長さを t の式で表せ.
(2)　H の z 座標を t の式で表せ.

解答例



(1)　$\dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}=\dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}=\tan\theta$ より　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\dfrac{3}{t}$

また　$\mathrm{OC}=3$

よって　$\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{t},\ 0,\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{t}\cos2\theta,\ \dfrac{3}{t}\sin2\theta,\ 0\right)$，

$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$

とおける.

ここで H は平面 ABC 上の点より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$l+m+n=1$ とおく.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos2\theta=\frac{9}{t^2}\cos2\theta\qquad\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

さらに，H は O からの距離が最小の点より　OH⊥平面 ABC　である.

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$　より　$(l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$

$$l|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+m\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-n|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=0\qquad\frac{9}{t^2}l+\frac{9}{t^2}(\cos2\theta)m-9n=0\quad\cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$　より　$(l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$

$$l\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+m|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-n|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=0\qquad\frac{9}{t^2}(\cos2\theta)l+\frac{9}{t^2}m-9n=0\quad\cdots\cdots②$$

①，②より　$l(1-\cos2\theta)=m(1-\cos2\theta)$　　$\theta\neq0$ より　$l=m$

このとき　$l+m+n=1$ より　$n=1-2l$　　よって，①より　$l+(\cos2\theta)l-t^2(1-2l)=0$

$(1+\cos2\theta+2t^2)l=t^2$　　ここで　$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}\right)-1$ より

$\left(\dfrac{2}{1+t^2}+2t^2\right)l=t^2$　　ゆえに　$l=\dfrac{t^2(1+t^2)}{2(t^4+t^2+1)}$

このとき　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=l^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+m^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+n^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+2lm\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=\frac{9}{t^2}l^2\times2+9(1-2l)^2+2l^2\cdot\frac{9}{t^2}\cos2\theta=\frac{18}{t^2}\left(1+2t^2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)l^2-36l+9$$

$$=\frac{36(t^4+t^2+1)}{t^2(1+t^2)}l^2-36l+9=\frac{9(t^4+t^2)}{t^4+t^2+1}-\frac{18(t^4+t^2)}{t^4+t^2+1}+9=\frac{9}{t^4+t^2+1}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\mathrm{OH}=\dfrac{\mathbf{3}}{\sqrt{\boldsymbol{t}^4+\boldsymbol{t}^2+\mathbf{1}}}$

ベクトルを導入した解法である．知識的にはオーソドックスである．三角関数を使って B の座標を設定した．
OH の長さの計算のくだりは，文字を「徐々に」減らした．まずは m と n を l で表し，その後，$\cos 2\theta$ を t で表し，最後に l を t で表した．これは「煩雑なものの解放は後回し」という概念に基づく．今回は l を t で表すタイミング，いわゆる「解放」が早ければ早いほど煩雑になりやすい．よって，l に関して降べきの順にしつつ cos を解放し，最後に l を解放したのがわかるであろう．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}=l\left(\dfrac{3}{t},\ 0,\ 0\right)+m\left(\dfrac{3}{t}\cos 2\theta,\ \dfrac{3}{t}\sin 2\theta,\ 0\right)+n(0,\ 0,\ 3)$

より H の z 座標は $3n$

すなわち　$3(1-2l)=3\left(1-\dfrac{t^2+t^4}{t^4+t^2+1}\right)=\dfrac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{t}^4+\boldsymbol{t}^2+\mathbf{1}}$　である．

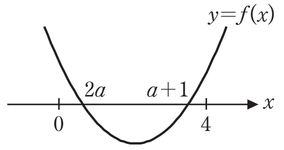
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　$0 \leqq a \leqq 2$ を満たす実数 a に対して，x の関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2-(3a+1)x+2a^2+2a$ とし，区間 $0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ の定積分を $S(a)=\int_0^4 |f(x)|dx$ とする．

(1)　$0<a<1$ のとき $S(a)$ を求めよ．

(2)　a が $0 \leqq a \leqq 2$ の値をとって変化するとき，$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

解答例



$(f(x)=(x-2a)(x-a-1),\ 0<a<1)$

(1)　$f(x)=x^2-(3a+1)x+2a(a+1)=(x-2a)(x-a-1)$

よって　$x=2a,\ a+1$　のとき　$f(x)=0$

$2a<a+1$ となるのは　$a<1$ のとき

よって　$0<a<1$ のとき

$$S(a)=\int_0^4 |f(x)|dx=\int_0^{2a} f(x)dx+\int_{2a}^{a+1}\{-f(x)\}dx+\int_{a+1}^4 f(x)dx$$

$$=\left(\int_0^4 f(x)dx-\int_{2a}^{a+1} f(x)dx\right)-\int_{2a}^{a+1} f(x)dx$$

$$=\int_0^4 f(x)dx-2\int_{2a}^{a+1} f(x)dx$$

$$=\int_0^4 \{x^2-(3a+1)x+2a^2+2a\}dx-2\int_{2a}^{a+1}(x-2a)\{x-(a+1)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3a+1}{2}x^2+(2a^2+2a)x\right]_0^4-2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(a+1-2a)^3\right\}$$

$$=\frac{64}{3}-8(3a+1)+4(2a^2+2a)+\frac{1}{3}(1-a)^3$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{3}a^3+9a^2-17a+\frac{41}{3}}$$

ここがポイント．これにより ∫ がまとまり，かつ同じ積分計算を2回しなくても済む．今回はさらに1/6公式も使える形．

(2)　$1<a<2$ のとき

$$S(a)=\int_0^{a+1} f(x)dx+\int_{a+1}^{2a}\{-f(x)\}dx+\int_{2a}^4 f(x)dx=\int_0^4 f(x)dx-2\int_{a+1}^{2a} f(x)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3a+1}{2}x^2+(2a^2+2a)x\right]_0^4-2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(2a-a-1)^3\right\}$$

$$=\frac{64}{3}-8(3a+1)+4(2a^2+2a)+\frac{1}{3}(a-1)^3=\frac{1}{3}a^3+7a^2-15a+13$$

$0<a<1$ のとき　$S'(a)=-a^2+18a-17=-(a-1)(a-17)$

この範囲において $S'(a)<0$　すなわち，$S'(a)$ は単調減少である．

$1<a<2$ のとき　$S'(a)=a^2+14a-15=(a-1)(a+15)$

この範囲において $S'(a)>0$　すなわち，$S'(a)$ は単調増加である．

$a=1$ のとき　$2a=a+1$ より　$S(a)=\int_0^4 (x-2)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^4=\frac{1}{3}\cdot 2^3=\frac{8}{3}$

よって，$S(a)$ は $\boldsymbol{a=1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{8}{3}}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　次の条件によって定められる数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を考える．

$$x_1=1,\ y_1=5,\ x_{n+1}=x_n+y_n,\ y_{n+1}=5x_n+y_n$$

次の問いに答えよ．

(1)　x_n および y_n をそれぞれ5で割ったときの余りを求めよ．

(2)　$a_n=x_n+cy_n$ とおいたとき，数列 $\{a_n\}$ が等比数列となるように定数 c の値を定め，a_n を n の式で表せ．

(3)　x_n および y_n を n の式で表せ．

解答例

(1)　$x_1=1$，$y_1=5$ より　$x_2=x_1+y_1=6=5\cdot1+1$　　$y_2=5x_1+y_1=10=5\cdot2+0$

よって，x_n，y_n を5で割った余りはそれぞれ1，0と推測される．

ここで，$x_n=5c_n+1$，$y_n=5d_n$　(c_n，d_n は整数)　とおくと

$$x_{n+1}=x_n+y_n=5(5c_n+d_n)+1,\ y_{n+1}=5x_n+y_n=5(5c_n+1)+5d_n=5(5c_n+d_n+1)$$

よって，x_{n+1}，y_{n+1} を5で割った余りがそれぞれ1，0となる．

ゆえに，すべての自然数 n において x_n，y_n を5で割った余りはそれぞれ**1, 0**である．

(2)　$\{a_n\}$ すなわち $\{x_n+cy_n\}$ が等比数列となるとき

$x_{n+1}+cy_{n+1}=r(x_n+cy_n)$　とおける．

$x_{n+1}+cy_{n+1}=(x_n+y_n)+c(5x_n+y_n)=(5c+1)x_n+(c+1)y_n$ であり，$x_n\neq0$，$y_n\neq0$ より

$$1+5c=r,\ 1+c=rc \qquad よって \quad c^2=\frac{1}{5} \quad より \quad \boldsymbol{c=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

このとき　$r=1\pm\sqrt{5}$，$a_1=1\pm\sqrt{5}$（複号同順）より

$$a_n=a_1\cdot r^{n-1}=\boldsymbol{\left(1\pm\sqrt{5}\right)^n}$$

(3)　(2)より

$$x_n+\frac{1}{\sqrt{5}}y_n=\left(1+\sqrt{5}\right)^n \quad \cdots\cdots① \qquad x_n-\frac{1}{\sqrt{5}}y_n=\left(1-\sqrt{5}\right)^n \quad \cdots\cdots②$$

(①＋②)÷2より　$\boldsymbol{x_n=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)^n+\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right\}}$

(①－②)÷$\frac{\sqrt{5}}{2}$ より　$\boldsymbol{y_n=\frac{\sqrt{5}}{2}\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right\}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。